9. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Dualita

D: Mějme lineární program s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b \text{ a } x \geq 0 \tag{P}$$

Pak jeho *duálem* nazveme následující lineární program s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min b^T y \text{ za podmínek } A^T y \geq c \text{ a } y \geq 0 \tag{D}$$

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

T(Slabá věta o dualitě**):** Mějme maximalizační lineární program (P) a jeho duální (minimalizační) program (D). Pak pro libovolné řešení x a libovolné řešení duálu y platí, že $c^T x \leq b^T y$.

Jinými slovy, hodnota duálního řešení je horní odhad na hodnotu libovolného primárního řešení.

T(Silná věta o dualitě**):** Pro úlohy (P) a (D) nastane právě jedna z následujících možností:

1. Ani (P), ani (D) nemá přípustné řešení.
2. (P) je neomezená a (D) nemá přípustné řešení.
3. (P) nemá přípustné řešení a (D) je neomezená.
4. Jak (P), tak (D) mají přípustné řešení. Pak existuje optimální řešení x^* úlohy (P) a optimální řešení y^* úlohy (D) a platí $c^T x^* = b^T y^*$.

Příklad první

Odvoďte duální úlohu pro lineární program:

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý

Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad třetí Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Minimální vrcholové pokrytí pro vážený graf $G = (V, E, w)$. Pro připomenutí, úloha vypadá takto:

$$\min \sum_{v \in V} w(v) x_v$$
$$\forall e = (uv) \in E : x_u + x_v \geq 1$$
$$\forall v \in V : x_v \geq 0$$

Doplňující otázka: Jaký problém řeší duální program (pro jednotkové váhy)?

Příklad čtvrtý Představme si zadaní lineárního programu, jehož řešení zatím neznáme:

$$\max c^T x, \ Ax \leq b, \ x \geq 0$$

Pomocí duality zkonstruujte nový lineární program, který splňuje:

- neobsahuje účelovou funkci,
- ze souřadnic libovolného přípustného řešení jde vyčíst optimální řešení původního.

Příklad pátý Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

- Pro každý lineární program L platí, že duál duálu L je původní program L.
- Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

Příklad šestý Zformulujte lineární program, který řeší úlohu Nejkratší s,t-cesta v neorientovaném neohodnoceném grafu. Vysvětlete hlavní ideu vašeho lineárního programu. Až budete mít daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

Doplňující otázka: Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?