

## 4. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Linearita, afinita, konvexita ... prostě geometrie

Příklady naleznete na zadní straně.

**D:** *Afinní prostor*  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  je má tvar  $L + v$  pro nějaký lineární prostor  $L$  a posuvný vektor  $v \in \mathbb{R}^d$ . Již víme, že jde určit pomocí soustavy rovnic  $Ax = b$ . *Dimenze* afinního prostoru  $A$  je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru  $L$ .

**D:** *Afinní kombinace* vektorů  $a_1, a_2, \dots, a_n$  je vektor  $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ , kde  $\alpha_i$  splňují  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ .

**D:** Množina bodů / vektorů  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor  $v \in V$  není afinní kombinací ostatních.

**D:** *Afinní obal*  $\text{Aff}(V)$  množiny vektorů  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  je množina všech afinních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z  $V$ .

**D:** *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v  $\mathbb{R}^d$  dimenze  $d - 1$ . V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice  $c^T x = b$ .

Nadrovina rozděluje prostor  $\mathbb{R}^d$  na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

**D:** Množina  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  se nazývá *konvexní množinou*, pokud  $\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in K$ . Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v  $K$  musí mít každý bod obsažený v  $K$ .

**D:** Vektor  $x$  je *konvexní kombinací* množiny vektorů  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pokud  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ , kde  $\alpha_i$  jsou reálná čísla splňující  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  a navíc  $\forall i : \alpha_i \in [0, 1]$ .

Množina bodů/vektorů  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  je v *konvexní poloze* („konvexně nezávislá“), pokud platí, že žádný vektor  $v \in V$  není konvexní kombinací ostatních.

**D:** *Konvexní obal*  $\text{conv}(V)$  množiny vektorů  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z  $V$ .

**D:** *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v  $\mathbb{R}^d$ , který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru  $\{x \mid Ax \leq b\}$  pro nějakou reálnou matici  $A$  a reálný vektor  $b$ .

**D:** Necht  $P$  je konvexní mnohostěn a  $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ . Jestliže  $\forall x \in P : c^T x \leq t$  a zároveň  $\exists x \in P : c^T x = t$ , označíme  $\{x \mid c^T x = t\}$  jako *tečnou nadrovinu*  $n_i$  konvexního mnohostěnu  $P$ .

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem  $S = n_i \cap P$  pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu  $P$ . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny*  $\emptyset$  a  $P$ .

**D:** Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze  $d - 1$  nazýváme *fasety*.

**D:** Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

## PŘÍKLAD PRVNÍ

- Víme, že v  $\mathbb{R}^d$  je maximálně  $d$  lineárně nezávislých vektorů a maximálně  $d+1$  afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v  $\mathbb{R}^d$  konvexně nezávislých vektorů?
- Jaký je počet stěn 3D krychle?

## PŘÍKLAD DRUHÝ

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru  $\mathbb{R}^4$ ?
2. Jak může vypadat vzájemná poloha dvou rovin v  $\mathbb{R}^4$ ?
3. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v  $\mathbb{R}^5$  v jednom bodě?

**PŘÍKLAD TŘETÍ** Necht  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je afinní prostor. Z definice je pak  $A$  tvaru  $A = L + v$  pro nějaký lineární prostor  $L$  a nějaký vektor  $v$ . Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  takový, že  $A = L + v$  pro nějaký vektor  $v$ .

Charakterizujte všechny vektory  $v$ , které posunou lineární prostor  $L$  na afinní prostor  $A$ .

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Vlastnosti polytopů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn  $P$  a najděte dvě různé tečné nadroviny  $n_a, n_b$ , jejichž neprázdný průnik s  $P$  určuje tutěž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn  $P$ . Dokažte, že průnik dvou stěn  $P$  je také stěna  $P$ .

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Už víme, že množina  $K$  je konvexní, pokud do množiny patří všechny úsečky s dvěma konci v  $K$ . Dokažte podobný popis pro afinitu:

Množina  $A$  je afinní podprostor  $\mathbb{R}^d$  právě tehdy, když pro každé dva body  $a, b \in A$  platí, že *přímka* určená body  $a, b$  je celá obsažena v  $A$ .

**PŘÍKLAD ŠESTÝ** Mějme mnohostěn  $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$ . Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).