2. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Ostré nerovnosti, celočíselné programy

Příklad nultý Pro zadanou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektory $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ uvažujme příslušný celočíselný program a lineární program:

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \le b \text{ pro } x \in \{0,1\}^n, \tag{CP}$$

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \le b \text{ pro } x \in [0,1]^n. \tag{LP}$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení x^*_{CP} a x^*_{LP}. Zdůvodněte, proč platí nerovnost $c^T x^*_{CP} \le c^T x^*_{LP}$.

Příklad první **Část 1.** Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &\le 8 \\ 2x - 5z &< -3 \\ 6x + 5y + 2w &= 5 \\ 3z + 2w &> 5 \\ x, y, z, w &\ge 0 \end{aligned}$$

Jak pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Část 3. Navrhněte postup, který pro LP s ostrými nerovnostmi rozhodne, jestli má optimální řešení.

Příklad druhý Navrhněte řešení následujícího problému s využitím předchozí úlohy. V rovině je dáno m bílých a n černých bodů. Chceme zjistit, zda existuje přímka, která má všechny bílé body na jedné straně a všechny černé body na druhé straně (na přímce žádný bod být nemůže).

Příklad třetí Formulujte jako úlohu lineárního programování hledání optimální strategie pro hru kámen, nůžky, papír, t.j. hru dvou hráčů s nulovým součtem (výhra jednoho hráče = prohra druhého hráče) a výplatní maticí:

	kámen	nůžky	papír
kámen	0	1	−1
nůžky	−1	0	1
papír	1	−1	0

Jak se změní naše strategie a očekávaná výhra, pokud se výplata prvního hráče ve stavu (kámen, nůžky) zvýší na 2?

Příklad čtvrtý Zformulujte problém batohu pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou váhu a cenu, máme batoh s danou nosností a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

Příklad pátý V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče p_i rohlíků a j-tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun.

Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.

Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

Příklad šestý

Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

A jak by mohlo vypadat ILP, které spočítá barevnost grafu (tj. minimální k takové, že je graf k obarvitelný)?

Příklad sedmý

Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, *kde* $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$, *chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu $e \in E$ máme proměnnou $x_e \in \{0, 1\}$, účelová funkce je $\min \sum_{e \in E} f(e)x_e$ a pro každý vrchol $u \in V$ máme podmínku $\sum_{e \in E\colon u \in e} x_e = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.