12. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Totální unimodularita

D: Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ je *unimodulární*, pokud $\det M \in \{-1, 1\}$.

T: Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

T: Unimodulární matice jsou právě ty celočíslené matice, jejichž inverze je celočíselná.

T: Nechť A je celočíselná matice. Pak mnohostěn $\{x | Ax = b, x \geq 0\}$ je celočíselný právě tehdy, když A_B (matice se sloupci z báze B) je unimodulární pro každou bázi B.

D: Matice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1.

T: Uvažme lineární program $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, kde b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty): Uvažme celočíselný program ILP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci LP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP.

T(Laplaceův rozvoj): Nechť A je čtvercová matice $n \times n$, označme A_{ij} matici A po smazání i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak pro libovolné $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} && \text{rozvoj přes řádek} \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj} && \text{rozvoj přes sloupec} \end{aligned}$$

D: *Matice incidence orinetovaného grafu* $G = \left(V, \overrightarrow{E}\right)$ je matice $A_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$, kde $(A_G)_{ve} = -1$, pokud $e = (v, u)$, $(A_G)_{ve} = 1$, pokud $e = (u, v)$ a $(A_G)_{ve} = 0$ jinak.

Příklad první

Dokažte, že pokud má celočíselná matice inverzní matici, která je rovněž celočíselná, pak je unimodulární.

Příklad druhý

Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$.
- Každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B, nebo oba patří do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

Příklad třetí

Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

Příklad čtvrtý

Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

Příklad pátý Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?

Příklad šestý Rozhodněte, jestli je zadaná matice totálně unimodulární:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Domácí úkoly

Druhý domácí úkol **[4 body]**

Vezměme si jeden vektor (sloupec) v s hodnotami $\{0,1\}^n$. Řekneme, že v je *intervalový*, pokud v má hodnoty 1 za sebou v právě jednom souvislém intervalu (třeba i délky 0). Matice M je *intervalová*, pokud všechny její sloupce jsou intervalové vektory.

Dokažte:

1. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a pro každou $A' \in \mathbb{R}^{k\times k}$ podmatici A existuje unimodulární $B' \in \mathbb{Z}^{k\times k}$ taková, že $B'A'$ je unimodulární nebo singulární. Pak A je totálně unimodulární.
2. Každá intervalová matice M je totálně unimodulární.