Úlohy ke cvičení

Definice: Graf $G = (V_G, E_G)$ je *izomorfní* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon V_G \to V_H$ takové, že $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Definice: Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou vrcholy grafu G uspořádány tak, že pro každé $i < j$ je $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$. Pak posloupnost $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ se nazývá *skóre* grafu G.

Definice: Graf se nazývá *k-regulární*, pokud má všechny vrcholy stupně k.

Věta: Každý graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice: Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta: Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.

Úloha 1: Ukažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Úloha 2: Najděte příklad dvou neizomorfních grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

Úloha 3:

a) Rozhodněte, zda existuje graf se skórem tvořeným $n \geq 2$ navzájem různými čísly.

b) Pro která n existuje graf na n vrcholech, jehož skóre má všechna čísla navzájem různá až na 2?

Úloha 4: Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak k nebo $|V_G|$ je sudé.

Úloha 5: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 6: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 7: Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.