Úlohy ke cvičení

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné. Velikost největšího řetězce $(X, \preceq)$ značíme $\omega(X, \preceq)$.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \npreceq m_2$ ani $m_2 \npreceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné. Velikost největšího řetězce $(X, \preceq)$ značíme $\alpha(X, \preceq)$.

Věta: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina velikosti n. Pak $\alpha(X, \preceq)\omega(X, \preceq) \geq n$.

Úloha 1: Najděte příklad uspořádané množiny, která má nejmenší prvek, ale existuje její neprázdná podmnožina, která nemá infimum.

Úloha 2: Najděte příklad lineárně uspořádané množiny s nejmenším a největším prvkem, ve které existuje podmnožina, která nemá supremum ani infimum.

Úloha 3: Dokažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ různých reálných čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky n+1.

Úloha 4:

a) Ukažte, že pro každou konečnou množinu platí, že všechna její lineární uspořádání jsou navzájem izomorfní.

Pozn.: Relace R na X je *izomorfní* relaci S na Y, pokud existuje bijekce $f \colon X \to Y$ taková, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$.

b) Ukažte, že pro každou množinu A přirozených čísel platí, že všechna lineární uspořádání množiny A jsou navzájem izomorfní, právě když A je konečná.

Úloha 5: Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

Úloha 6: Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$