Úlohy ke cvičení

Definice: Relace na množině X se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- *(částečné) uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina. Prvek $a \in X$ se nazývá

- *největší prvek*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x \preceq a$,
- *maximální prvek*, pokud neexistuje $x \in X$ takové, že $a \prec x$.

Analogicky definujeme *nejmenší* a *minimální prvek*.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $a \in X$ se nazývá *horní mez* množiny M, pokud pro všechna $m \in M$ platí $m \preceq a$. Nejmenší horní mez (pokud existuje) se nazývá *supremum*. Analogicky definujeme *dolní mez* a *infimum*.

Definice: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $M \subseteq X$ její podmnožina. Pak M se nazývá

- *řetězec*, pokud pro každé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \preceq m_2$ nebo $m_2 \preceq m_1$. Neboli každé dva prvky z M jsou porovnatelné. Velikost největšího řetězce $(X, \preceq)$ značíme $\omega(X, \preceq)$.
- *Antiřetězec*, pokud pro každé dva různé $m_1, m_2 \in M$ platí $m_1 \npreceq m_2$ ani $m_2 \npreceq m_1$. Neboli každé dva různé prvky z M jsou neporovnatelné. Velikost největšího řetězce $(X, \preceq)$ značíme $\alpha(X, \preceq)$.

Věta: Buď $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná konečná množina velikosti n. Pak $\alpha(X, \preceq)\omega(X, \preceq) \geq n$.

Definice: Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xfy. Takové y značíme $f(x)$. Zobrazení pak značíme $f \colon X \to Y$.

Definice: Zobrazení $f \colon X \to Y$ se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

Úloha 1: Dokažte, že zobrazení $f \colon X \to Y$ je

a) prosté právě tehdy, když platí $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ pro každé $g, h \colon W \to X$,

b) na právě tehdy, když platí $g \circ f = h \circ f \implies g = h$ pro každé $g, h \colon Y \to Z$.

Úloha 2: S použitím předchozího tvrzení dokažte:

a) Pokud $f \circ g$ je prosté, je g rovněž prosté.

b) Pokud $h \circ f$ je na, je h rovněž na.

Úloha 3: Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1, \ldots, n\}$.

a) Dokažte, že tato relace je uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 4: Dokažte, že pokud má v uspořádané množině každá podmnožina supremum, má v ní také každá podmnožina infimum.

Úloha 5: Dokažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ reálných čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky n+1.

Úloha 6:

a) Ukažte, že pro každou konečnou množinu platí, že všechna její lineární uspořádání jsou navzájem izomorfní.

Pozn.: Relace R na X je *izomorfní* relaci S na Y, pokud existuje bijekce $f\colon X \to Y$ taková, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$.

b) Ukažte, že pro každou množinu A přirozených čísel platí, že všechna lineární uspořádání množiny A jsou navzájem izomorfní, právě když A je konečná.