

## Úlohy ke cvičení

*Definice:* Relace  $R$  na množině  $X$  je:

- *reflexivní*, pokud pro každé  $x \in X$  platí  $xRx$ ,
- *symetrická*, pokud  $xRy$  implikuje  $yRx$ ,
- *antisymetrická*, pokud  $xRy$  a  $yRx$  implikuje  $x = y$ ,
- *tranzitivní*, pokud  $xRy$  a  $yRz$  implikuje  $xRz$ .

*Definice:* Relace na množině  $X$  se nazývá

- *ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní,
- (*částečné*) *uspořádání*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

*Definice:* Mějme relace  $R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$ . Pak *složení* relací  $R, S$  je relace  $R \circ S \subseteq X \times Z$  definovaná následovně:  $xR \circ Sz$  právě tehdy, když existuje  $y \in Y$  takové, že  $xRy$  a zároveň  $ySz$ .

*Definice:* Relace  $f \subseteq X \times Y$  se nazývá *zobrazení*, pokud pro každé  $x \in X$  existuje právě jedno  $y \in Y$  takové, že  $xfy$ . Takové  $y$  značíme  $f(x)$ . Zobrazení pak značíme  $f: X \rightarrow Y$ .

*Definice:* Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  se nazývá

- *prosté (injektivní)*, pokud  $f(x_1) = f(x_2)$  implikuje  $x_1 = x_2$ ,
- *na (surjektivní)*, pokud pro každé  $y \in Y$  existuje  $x \in X$  takové, že  $f(x) = y$ ,
- *vzájemně jednoznačné (bijektivní)*, pokud je prosté a na.

*Úloha 1:* Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

- $X = \{a, b, c\}$ ,  $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$
- $X = \{a, b, c\}$ ,  $R = \{(a, a), (c, c)\}$
- $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$ ,
- $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$ , neboli  $x$  a  $y$  jsou nesoudělné.

*Úloha 2:* Určete počet relací na čtyřech ( $n$ ) prvcích:

- všech,
- reflexivních,
- symetrických,
- antisymetrických.

*Úloha 3:* Buďte  $R$  a  $S$  reflexivní/symetrické/antisymetrické/transitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní/symetrické/antisymetrické/transitivní?

- a)  $R \cup S$
- b)  $R \cap S$
- c)  $R \setminus S$
- d)  $R \oplus S$
- e)  $R \circ S$
- f)  $R^{-1}$

*Úloha 4:* Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.

*Úloha 5:* Buďte  $X, Y$  konečné množiny takové, že  $|X| \leq |Y|$ .

- a) Určete počet všech zobrazení  $f: X \rightarrow Y$ .
- b) Určete počet prostých zobrazení  $f: X \rightarrow Y$ .
- c) Určete počet vzájemně jednoznačných zobrazení  $f: X \rightarrow X$ .

*Úloha 6:* Najděte

- a) bijekci mezi  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Z}$ ;
- b) bijekci mezi  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{N}^2$ ;
- c) prosté zobrazení z  $\mathbb{Q}$  do  $\mathbb{N}$ . (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)

*Úloha 7:* Uvažme relaci “ $x$  je dělitelem čísla  $y$ ” na množině  $\{1, \dots, n\}$ .

- a) Dokažte, že tato relace je uspořádání.
- b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?
- c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?
- d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?