Úlohy ke cvičení

Definice: Potenční množina množiny X je $2^X := \{M; M \subseteq X\}$. Neboli množina všech podmnožin X. Značí se také $\mathcal{P}(X)$.

Definice: Relace R na množině X je:

- *reflexivní*, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx,
- *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx,
- *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$,
- *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz.

Definice: Mějme relace $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. Pak *složení* relací R, S je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná následovně: $xR \circ Sz$ právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a zároveň ySz.

Úloha 1: Zjistěte, které z následujících vztahů pro symetrickou diferenci $\oplus$ definovanou $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ platí, a které neplatí.

a) $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

b) $A \oplus B = B \oplus A$

c) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

d) $A \oplus (B \oplus A) = A$

e) $A \oplus A = \emptyset$

f) $A \oplus \emptyset = A$

Pokud neplatí, opravte ji pokud možno co nejmenším zásahem.

Úloha 2: Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a) $A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 3: Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?

Úloha 4: Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat pomocí operací průniku a sjednocení a množinového rozdílu ze dvou počátečních množin.

Úloha 5: Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat pomocí binárních operací průniku a sjednocení ze dvou počátečních množin.

Úloha 6: Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

d) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělné.

Úloha 7: Určete počet relací na čtyřech (n) prvcích:
— všech,
— reflexivních,
— symetrických,
— antisymetrických.

Úloha 8: Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \oplus S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}