

Úlohy ke cvičení

Věta: Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.

Věta: Pro každý graf G tvoří množina \mathcal{C} všech charakteristických vektorů eulerovských množin vektorový prostor nad dvouprvkovým tělesem $GF(2)$ dimenze $|E| - |V| + k$, kde k je počet komponent grafu G .

Věta: Je-li $G = (V, E)$ rovinný graf s alespoň 3 vrcholy, pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelník jako podgraf, pak platí $|E| \leq 2|V| - 4$.

Úloha 1: Určete, kolik různých kružnic (všech možných délek) obsahuje úplný graf K_n . Výsledek vyjádřete pomocí sumy.

Úloha 2: Dokažte: Počet kružnic v $K_{n,n}$ je $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}^2 \frac{k!(k-1)!}{2}$.

Úloha 3: Určete dimenzi prostoru cyklů (tzv. cyklomatické číslo) mřížky $m \times n$.

Úloha 4: Dokažte, že počet eulerovských množin v grafu G je sudé číslo právě tehdy, když G není les.

Úloha 5: Dokažte, že graf $K_{m,n}$ je rovinný právě když $\min\{m, n\} \leq 2$.

Úloha 6: Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

Úloha 7: Dokažte, že odhad $|E| \leq 2|V| - 4$ pro rovinné grafy bez trojúhelníku je nejlepší možný.

Úloha 8: Nakreslete K_5 , K_6 na torus.

Úloha 9: Najděte rovinný graf, který má stupně všech vrcholů 5.