Úlohy ke cvičení

Princip inkluze a exkluze: Nechť $A_1, \dots A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Definice: Buď $G = (V, E)$ graf. Množina $M \subseteq E$ se nazývá *párování*, pokud pro každé dvě různé $e, f \in M$ platí $e \cap f = \emptyset$. Párování M se nazývá *perfektní*, pokud pro každý vrchol $v \in V$ existuje $e \in M$ taková, že $v \in M$.

Definice: Uzavřený sled $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$ v grafu G je *eulerovský*, pokud se v něm každá hrana grafu G vyskytuje právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Graf se nazývá *eulerovský*, pokud v něm existuje eulerovský sled.

Věta: Graf je eulerovský právě tehdy, když neobsahuje žádný vrchol lichého stupně.

Definice: Souvislý graf, který neobsahuje kružnici (cyklus) jako podgraf se nazývá *strom*. Vrchol stromu stupně (nejvýše) 1 se nazývá *list*. Strom, který je podgrafem grafu G a obsahuje všechny jeho vrcholy se nazývá *kostra grafu G*.

Věta: Každý graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně.

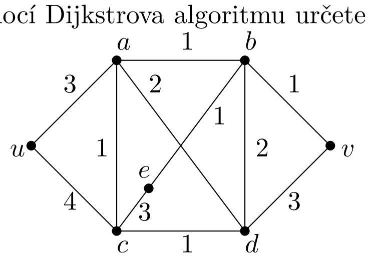
Úloha 1: Určete počet perfektních párování v úplném grafu.

Úloha 2: Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

Úloha 3: Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně k, tak potom strom má alespoň k listů.

Úloha 4: Mějme strom, který má $l > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.

Úloha 5: Pomocí Dijkstrova algoritmu určete nejkratší cestu z vrcholu u do vrcholu v v následujících grafech.



Úloha 6: Pro která n existuje graf s právě n různými kostrami?

Úloha 7: Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E_G \setminus E_K$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že jak $(K \setminus e') \cup e$ tak $(K \setminus e'') \cup e$ jsou opět kostry grafu G.