

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte matematickou indukcí:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n).$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Úloha 2: Dokažte indukcí Moivreovu větu:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

Použijte vztahy:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta).$$

Úloha 3: V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra — automobil je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěmi je cena útěchy — koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dveří takové, že je za nimi výhra není. V této situaci má hráč otevřít jednu ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které původně ukázal?

Úloha 4: Z n předmětů vybíráme k . Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variace)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Úloha 5: Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:

- každého jednotlivce $10\times$,
- každou dvojici $5\times$,
- každou trojici $3\times$,
- každou čtveřici $2\times$,
- celou pětici $1\times$.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?

Úloha 6: Skupina odsouzených vězňů získala šanci se zachránit. Následující den každý vězeň dostane náhodně buď červenou, nebo černou čepici. Poté budou postaveni do řady tak, že každý vidí všechny vězně a jejich čepice před sebou, ale nikoho za sebou. Zároveň žádný vězeň neví, jakou má čepici. Vězni budou postupně od posledního v řadě voláni, aby řekli barvu svoji čepice. Pokud barvu uhádnou, bude jim udělena milost. Každý vězeň zároveň slyší, co říkají spoluvězni stojící za ním (tedy ti, kteří jsou voláni před ním). Přes noc mají vězni možnost domluvit se na strategii. Najděte strategii, která maximalizuje počet zachráněných vězňů.

Úloha 7: Dokažte, že pokud se sejde 6 lidí na večírku, pak se buď 3 z nich navzájem znají, nebo je mezi nimi trojice lidí, z nichž se žádní 2 navzájem neznají.