Seminář z kooperativní teorie her

Filip Úradník

20. února 2024

1 Kooperativní hry

Definice 1.1 (Kooperativní hra): *Kooperativní hra* je dvojice (N, v), kde

- $N = \{1, \ldots, n\}$ je množina *hráčů*,
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce*, a $v(\emptyset) = 0$.

Množina všech her o n hráčích je Γ^n.

Definice 1.2 (Koalice): *Koalice* je množina $C \subseteq N$.

Definice 1.3 (Třídy): Hra (N, v) je

- *monotonní* $\equiv (\forall S \subseteq T \subseteq N)(v(S) \leq v(T))$,
- *superaditivní* $\equiv (\forall S, T \subseteq N : S \cap T = \emptyset)(v(S) + v(T) \leq v(S \cup T))$,
- *konvexní* $\equiv (\forall S, T \subseteq N)(v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T))$.

Definice 1.4 (Výplatní vektor): Nechť (N, v) je kooperativní hra. *Výplatní vektor* je $x \in \mathbb{R}^n$, kde x_i je výplata hráče i. Vektor je

- *eficientní* $\equiv x(N) := \sum_{i \in N} x_i = v(N)$,
- *individuálně racionální* $\equiv (\forall i)(x_i \geq v(i))$.

Definice 1.5 (Koncept řešení): *Koncept řešení* je funkce $\mathcal{S} : \Gamma^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$, tž. pro všechny hry $(N, v) \in \Gamma^n$ je $\mathcal{S}(v)$ eficientní.

Definice 1.6 (Jádro): Nechť (N, v) je kooperativní hra. *Jádro* je více-bodový koncept řešení definován jako

$$\mathcal{C}(v) := \{x \in \mathcal{I}(v) \mid (\forall S \subseteq N)(x(S) \geq v(S))\}$$

Definice 1.7 (Shapleyho hodnota): Nechť (N, v) je kooperativní hra. *Shapleyho hodnota* pro hráče i je jednobodový koncept řešení definován jako

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup i) - v(S)\right).$$

Věta 1.8: Shalpleyho hodnotu lze ekvivalentně definovat jako jediný vektor ϕ, který splňuje následující axiomy

(A1) *eficience*, tj. $\sum_{i \in N} \phi_i = v(N)$,

(A2) axiom *nulového hráče*, tj. $(\forall i) \quad (\forall S \subseteq N \setminus \{i\})(v(S) = v(S \cup \{i\})) \to \phi_i = 0$,

(A3) *symetrie*, tj. $(\forall i, j) \quad (\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\})(v(S \cup \{j\}) = v(S \cup \{i\})) \to \phi_i = \phi_j$,

(A4) a *additivita*, tj. $(\forall v, w \in \Gamma^n) \quad \phi(v) + \phi(w) = \phi(v + w)$.