Koaliční struktury a weighted voting games

- SIMPLE GAME: (N, v), $N = \{1, \dots, n\}$, $v : 2^N \to \{0, 1\}$
- Weighted voting game: (N, w, q)

$w \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ simple game odpovídající (N, w, q) je definovaná jako: $\forall S \subseteq N$:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Jádro: $C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall S \subseteq N : x(S) \geq v(S) \wedge x(N) = v(N)\}$
- Jádro SIMPLE GAME je neprázdné
  $\Leftrightarrow \exists$ VETO HRÁČ
  (hráč, který je ve všech koalicích)

$\boxed{\text{DEF.}}$ **JÁDRO NA KOALIČNÍ STRUKTUŘE $\pi(N)$ pro (N, w, q)** je množina výplat $x \in \mathbb{R}^n$, pro které platí: Pro $\pi(N) = (S_1, \dots, S_k)$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = N$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$: $x(S_i) = v(S_i)$

$\wedge$ $\forall S \subseteq N$: $w(S) \geq q \Rightarrow x(S) \geq 1$

$\to$ Značíme $CSC(v)$ $\to$ ale pozor CSC je definované vzhledem k WVG!

• **OTÁZKA**: $\exists\ \pi(N)\ \forall (N, w, q)$ weighted voting hry taky, že $CSC(\pi) \neq \emptyset$?

→ $\boxed{\text{NE}}$: Pro $q > \frac{w(N)}{2}$ $\exists$ nejvýše 1 výherní koalice pro jakoukoliv $\pi(N)$.

$\Rightarrow$ $CSC(\pi)$ splývá pak s $C(\pi)$ a stačí, aby neexistoval VETO hráč

→ Pro $q < \frac{w(N)}{2}$ lze zkonstruovat protipříklad:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$w = (1, 1, 1, 1, 1)$

$q = 2$

(Rozbor případů, které mohou nastat)

SLOŽITOST

Q1: IS CS-Core NONEMPTY for (N, w, q)?

Q2: Je $x = (x_1, \dots, x_n)$ v CS-core?

- Q1 je NP-těžká
- Q2 je CoNP-těžká

(Pro obecné váhy)

Alg. na zjištění neprázdnosti CSC(v)

pro (N, w, q) a $\pi(N) = (S_1, \dots, S_k)$:

Je to linear feasibility program

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
$$x(S_j) = 1 \quad \forall j : w(S_j) \geq q$$
$$x(S_j) = 0 \quad \forall j : w(S_j) < q$$
$$x(S_J) \geq 1 \quad \forall J \subseteq N, w(J) \geq q$$