

SIMPLE GAMES - ÚVOD

- **SIMPLE GAME** (SG) je kooperativní hra (N, v) se speciální strukturou:
$$\forall S \subseteq N: v(S) \in \{0, 1\}$$

(Typicky se uvádějí párově množinami)
tj. $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

NEBO lze definovat SIMPLE GAME jako (N, W) , kde $W \subseteq 2^N$

W ... množina vítězných koalic

- Speciální třída SIMPLE GAMES jsou **WEIGHTED MAJORITY GAMES** (WMG), tj. vážené většinové hry

def. WMG je hra (N, q, w)

$N = \{1, 2, \dots, n\}$... hráči

$w \in \mathbb{R}^n$... váhy

$q \in \mathbb{R}$... kvóta

pak WGM určuje hra (N, w) ,
 kde $v(S) = \begin{cases} 1, & \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$

Probrali jsme vztah WGM a SG.

Když monotónní SG nemůžeme
 vyjádřit jako SG?

• Když WGM není TRADE ROBUST!

→ Pro $n=2, n=3$

\exists vždy vyjádření
 SG jako WGM

→ Pro $n=4$

a SG: $v(N)=1$

$v(S)=1, |S|=3$

$v(T)=0, |T|=1$

$v(\{123\})=1, v(\{343\})=1$

$v(\{133\})=0, v(\{243\})=0$

$w_1 + w_2 \geq q$

$w_1 + w_3 < q$

\Downarrow

$w_2 > w_3$

$w_3 + w_4 \geq q$

$w_2 + w_4 < q$

\Downarrow

$w_2 < w_3$

VÁGNE:

Pokud máme množinu
 vyherních bodů
 a vymíníme hráče
 a dostaneme množinu
 nevyherních bodů,

pak hra není
 TRADE
 ROBUST!

SPOR! \Rightarrow NELZE nalézt vektor $v \in \mathbb{R}^n$

a kvóta $q \in \mathbb{R}$ tak, aby reprezentovaly
danou SG

INDEXY SÍLY

- Definovali jsme Shapley-Shubik a Banzhafův index síly

SHAPLEY-SHUBIK pro hráče i :

$$f_i^{Sh} = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

BANZHAF:

$$f_i^B = \frac{\sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{i\})]}{\sum_{i=1}^n \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{i\})]}$$

Příklad (VESNICE A SNĚM)

- Jedná se o vesnici s počty obyvatel:

$$v_1 = 1000, v_2 = 200, v_3 = 100, v_4 = 100, v_5 = 50, v_6 = 50$$

- Jaka zvolit # reprezentantů? $\left\{ \sum_{i \in N} v_i = 1500 \right.$
 \rightarrow Řešení: # reprezentantů odpovídá síle (Banzhaf) vesnice přidané kvótu.

Tedy můžeme modelovat situaci jako WMG.

Řešili jsme pro $q = 450$,

pale sily b_i vesnic jsou, body v_i vesnice

$$b_1 = \frac{29}{40}$$

$$b_2 = \frac{3}{40}$$

$$b_3 = \frac{3}{40}$$

$$b_4 = \frac{3}{40}$$

$$b_5 = \frac{1}{40}$$

$$b_6 = \frac{1}{40}$$

vítání - lé
vesnice

Definujeme-li hru $(N, \frac{q}{50}, \frac{v}{50})$,
pak dostaneme ekvivalentní
simple game \Rightarrow stejné indexy
sil pro (N, q, v) a $(N, \frac{q}{50}, \frac{v}{50})$

Pro hru $(N, \frac{q}{50}, \frac{v}{50})$ platí, že

počet reprezentantů je $\frac{\sum_{i=1}^6 v_i}{50} = 30$

A reprezentanti pro vesnice jsou

$(20, 4, 2, 2, 1, 1)$ s brátou 9.

Práblem bud bromptilcovanejši pálsud
representantu bude prádem daní
menši mnáštvi, napé 10.