Manipulace kvóty q ve WVG

HLAVNÍ OTÁZKA: Pro danou hru (N, w, q), jak změnit kvótu q, aby se síla hráče (měřená např. Banzhafovým indexem) změnila požadovaným směrem?

- (N, w, q), $N = \{1, \dots, n\}$
  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$
  $q \in \mathbb{R}$

Banzhaf: $\beta_i(G) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} (v(S) - v(S \setminus i))$

SHAPLEY-SHUBIK: $\phi_i(G) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i))$

$\boxed{\text{pozn.}}$ Banzhafův index je takto nenormalizovaný (tj. $\sum_{i \in N} \beta_i(G)$ není nutně 1) → tato definice nabízí taky pravděpodobnostní interpretaci!

VZOROVÝ PŘÍKLAD:

$w = (50, 100, 200, 400)$

q ... různé volby

Ukázali jsme si chování $\beta_i(q)$ pro různé kvóty a jak se mění.

$\boxed{\text{Věta}}$ Pro dané N a $\overbrace{w}^{w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n}$ jaké jsou horní a spodní meze pro různé kvóty q a q' na $\frac{\beta_i(q)}{\beta_i(q')}$, $\frac{\phi_i(q)}{\phi_i(q')}$.

Tj. $\underline{a} \leq \frac{\beta_i(q)}{\beta_i(q')} \leq \bar{a}$; $\underline{b} \leq \frac{\phi_i(q)}{\phi_i(q')} \leq \bar{b}$

Pro $i=1$: $\underline{a} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $\bar{a} = 2^{n-1}$

$\underline{b} = \frac{1}{n}$, $\bar{b} = n$

pro $i \geq 2$: $\bar{a}, \bar{b} > K, \forall K \in \mathbb{R}$ (tj: neomezené)

$\underline{a}, \underline{b} = 0$

$\boxed{\text{TVRZENÍ}}$

$$\beta_i(q) = \beta_i(w(N) - q + 1)$$
$$\phi_i(q) = \phi_i(w(N) - q + 1)$$

Stačí pracovat s $q \geq \frac{w(N)}{2}$.

Kdy lze kvóta zvolit tak, aby daný hráč i byl nulový?

$\boxed{\text{Věta}}$ Hráč i nemůže být nulový hráč pro libovolnou $q \in [0, w(N)]$, kde $0 \leq w_1 \leq \dots \leq w_{i-1} \leq w_{i+1} \leq \dots \leq w_n$ $\iff$

$$\boxed{\sum_{j \in \{1,\dots,k-1\} \setminus i} w_j \geq w_k - w_i, \quad \forall k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} \quad (\ast)$$

↳ LZE zkonstruovat jednoduchý algoritmus na zjištění zda-li existuje nulový hráč.

ALG: VSTUP: váhy w

KROK 1: seřaď váhy

KROK 2: Ber hráče $i=1$ a zjisti jestli platí podmínka (*)

Pokud platí, tak nulový hráč není. Jinak ano.

Cíl: Empirická studie pro hry s váhy z omezeného intervalu.

Popsali jsme si způsob, jak zkonstruovat simulaci pro daný problém.

1.) Konstruujeme hru náhodně!

N má uniformní rozdělení na $\{5, \dots, 25\}$

w_i má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

dané μ a σ^2

q je dáno uniformně z $[0, w(N)]$

2.) Konstruujeme hry $G_1, \ldots, G_k$,
kde $G_i = (N, w, q + \Delta)$

$\Delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

3.) Vyhodnotíme změny β_j v těchto hrách pro daného hráče j.