

FAIR DIVISION

MODEL :

$N = \{1, \dots, n\}$... hráči

$M = \{a_1, \dots, a_m\}$... objekty

valuační fce : $\forall S \subseteq M$ je definována $v_i(S)$
 $\forall i \in N$

• speciální třídy : aditivní $\Rightarrow v_i(S) = \sum_{a \in S} v_i(a)$
subaditivní $\Rightarrow v_i(S) + v_i(T) \geq v_i(S \cup T)$
 $S \cap T = \emptyset$

monotónní $\Rightarrow v_i(S) \leq v_i(T)$
 $\forall S \subseteq T$

0-1 $\Rightarrow \forall a \in S (v_i(S \cup a) - v_i(S)) \in \{0, 1\}$
max $\Rightarrow v_i(S) = \max_{a_j \in S} v_i(a_j)$

V rámci modelu také definujeme podmínky, které chceme, aby byly splněné:

Podmínky (férovosti) : Pro alokaci $A = (A_1, \dots, A_n)$
 $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq M$
 $A_i \cap A_j = \emptyset$

EF (envy-freeness) : $\forall i \in N: v_i(A_i) \geq v_i(A_j)$

PROP : $\forall i \in N: v_i(A_i) \geq \frac{1}{n} v(M)$
(proportionality)

PO (Pareto efficiency) $\nexists A' : \forall i \in N \ v_i(A'_i) \geq v_i(A_i)$
 a $\exists i \in N : v_i(A'_i) > v_i(A_i)$

EF1 : $\forall i \in N \ \forall j \in N \ \exists a \in A_j : v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus a)$
 (envy-freeness up to one item)

EFX : $\forall i \in N \ \forall j \in N \ \forall a \in A_j : v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus a)$
 (envy-freeness up to any item)

MMS : $\forall i \in N : v_i(A_i) \geq \max_{P=(P_1, \dots, P_n) \in \Pi(M)} \min_{j \in N} v_i(P_j)$

INTUICE
 za MMS:

Hráči rozdělí objekty do n skupin tak, aby nejmenší skupina byla co největší

$\Pi(M)$ množina všech rozdělení $M, P_j, \bigcup_{i \in N} P_i = M$
 $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$

IMMS : $\forall i \in N : v_i(A_i) \geq \max_{P=(P_1, \dots, P_n) \in \Omega(M)} \min_{j \in N} v_i(P_j)$

$\Omega(M)$ jsou rozdělení M taková, že $\forall a \in P_j \ \forall b \in P_i, j < i : v_a(a) \geq v_a(b)$

O TÁZKY: • Je daná podmínka splnitelná pro danou třídu fci? (Např. EFX + odlišná)

• Je kombinace podmínek splnitelná EFX + roz?

• Jaký je vztah mezi podmínkami?

→ Podíváme-li jsme se na algoritmy splňující EFX: • round-robin

• envy-cycle elimination

→ VZTAH IMMS a MMS:

• Jaké nejmenší α je ve vztahu $IMMS \leq \alpha MMS$??

• Pro $n=2$ jsme našli.

PŘÍŠTĚ: • α pro $n > 2$

• α v závislosti na m ?