

**Tvrzení:** Algoritmus pánské volenky najde stabilní párování optimální pro pány, tedy takové, že žádný pán nemůže mít v žádném stabilním párování dámu dle svého seznamu lepší, než jakou mu tento algoritmus přidělí.

K důkazu tohoto tvrzení potřebujeme následující definici:

**Definice:** Hříchem nazveme situaci, kdy v algoritmu pánské volenky dáma odmítne pána, kterého by mohla mít v **nějakém** stabilním párování.

Důležité je v definici slovo *nějakém*. Od teď tedy budou vystupovat dvě párování. Párování  $\mathcal{P}$  vzniklé algoritmem pánské volenky a párování  $\mathcal{P}'$ , které „spadlo z nebe“.

Ve skutečnosti Tvrzení dokážeme pomocí následujícího Lemmatu:

**Lemma:** V algoritmu pánské volenky nenastane hřích.

Důkaz, že z Lemmatu plyne Tvrzení je triviální (když nenastane hřích, skončí každý pán u nejlepší dámy, kterou může v nějakém stabilním párování mít).

**Důkaz:** Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že hřích nastane poprvé tak, že *Eva* odmítne *Adama*, kterého mohla mít v nějakém stabilním párování  $\mathcal{P}'$  a vymění ho za jistého *Žibřida*. V argumentaci bude použit fakt, že by se mělo jednat o první hřích! Podívejme se dále na strukturu párování  $\mathcal{P}'$ . V něm jsou spárováni: *Eva* a *Adam*, kdežto zmíněný *Žibřid* je zde spárován s jistou *Kunhutou*. Tedy dvojice  $\{Eva, Adam\}$  a  $\{Žibřid, Kunhuta\}$  se vyskytují v nějakém stabilním párování. Ve volenkovém algoritmu ovšem *Žibřid* přišel za *Evou* a *Eva* ho přijala. To znamená, že **dosud nebyl za Kunhutou**, protože ta by spáchala hřích ještě dříve (ten, který spáchala *Eva* má být první) a tedy zatímco *Eva* dává *Žibřidovi* přednost před *Adamem*, *Žibřid* dává přednost *Evě* před *Kunhutou*. Ale v tom případě páry  $\{Eva, Adam\}$  a  $\{Žibřid, Kunhuta\}$  nemohou být stabilní, protože v párování  $\{Eva, Žibřid\}, \{Adam, Kunhuta\}$  si jak *Eva* tak *Žibřid* polepší (což je spor se stabilitou párování  $\mathcal{P}'$ ).