Anotace

- Grafové algoritmy II.
- Delegáty.
- Anonymní funkce.
- Vlákna.

Nejkratší cesta

Hledáme-li v grafu nejkratší cestu z vrcholu do vrcholu, záleží na reprezentaci:

- Prolezeme graf do šířky (máme-li seznam vrcholů a hran),

Theorem

V matici ${A_G}^k$ hodnota na pozici i, j určuje počet sledů délky k z vrcholu i do vrcholu j.

Corollary

V matici $(A_G + I)^k$ určuje hodnota na pozici i, j počet sledů délky nejvýše k z i do j.

Nejkratší cesta

Hledáme-li v grafu nejkratší cestu z vrcholu do vrcholu, záleží na reprezentaci:

- Prolezeme graf do šířky (máme-li seznam vrcholů a hran),
- mocníme matici sousednosti, pokud máme maticovou reprezentaci.

Theorem

V matici ${A_G}^k$ hodnota na pozici i, j určuje počet sledů délky k z vrcholu i do vrcholu j.

Corollary

V matici $(A_G + I)^k$ určuje hodnota na pozici i, j počet sledů délky nejvýše k z i do j.

Dijkstrův algoritmus

Hledá nejkratší cestu z daného vrcholu (do všech ostatních)

Vstup: Graf s `nezáporně` ohodnocenými hranami.

- Udržujeme "frontu" vrcholů setříděnou podle dosud nejkratší cesty do nich.
- Na začátku zinicializujeme vzdálenosti do všech vrcholů kromě startovního nekonečnem (tedy dost vysokou hodnotou) a vzdálenost do startu nulou.
- Startovní vrchol přidáme do "fronty" dosažitelných vrcholů.
- Vrchol, do kterého se dostaneme nejkratší cestou z fronty odstraníme a pokusíme se cestu jdoucí z něj rozšířit do jeho sousedů.
- Toto opakuj, dokud je "fronta" neprázdná.

Rozšíření cesty

Rozšíření cesty vypadá tak, že pro vrchol v ve vzdálenosti $d(v)$ zkusíme pro každou hranu $\{v, w\}$, zda

$$d(w) > d(v) + delka(\{v, w\}).$$

Pokud ano, $d(w) := d(v) + delka(\{v, w\})$ a oprav pozici vrcholu w ve "frontě".

Analýza

- Algoritmus je popsán a dokázán v mnoha knihách (a skriptech), kupř. Kapitoly z diskrétní matematiky nebo Algebraické algoritmy (Kučera, Nešetřil)...

Analýza

- Algoritmus je popsán a dokázán v mnoha knihách (a skriptech), kupř. Kapitoly z diskrétní matematiky nebo Algebraické algoritmy (Kučera, Nešetřil)...
- Konečnost: V každé iteraci odstraníme z "fronty" jeden vrchol, který se v ní už neobjeví
  (protože mezi vrcholy ve frontě měl nejmenší vzdálenost od startu a vzdálenosti jsou nezáporné).

Analýza

- Algoritmus je popsán a dokázán v mnoha knihách (a skriptech), kupř. Kapitoly z diskrétní matematiky nebo Algebraické algoritmy (Kučera, Nešetřil)...
- Konečnost: V každé iteraci odstraníme z "fronty" jeden vrchol, který se v ní už neobjeví
  (protože mezi vrcholy ve frontě měl nejmenší vzdálenost od startu a vzdálenosti jsou nezáporné).
- Parciální správnosti pomůže invariant:
  V každém kroku evidujeme nejkratší cesty ze startu používající pouze vrcholy již odstraněné z "fronty".

Analýza

- Algoritmus je popsán a dokázán v mnoha knihách (a skriptech), kupř. Kapitoly z diskrétní matematiky nebo Algebraické algoritmy (Kučera, Nešetřil)...
- Konečnost: V každé iteraci odstraníme z "fronty" jeden vrchol, který se v ní už neobjeví
  (protože mezi vrcholy ve frontě měl nejmenší vzdálenost od startu a vzdálenosti jsou nezáporné).
- Parciální správnosti pomůže invariant:
  V každém kroku evidujeme nejkratší cesty ze startu používající pouze vrcholy již odstraněné z "fronty".
- Z invariantu plyne korektnost.

Analýza

- Algoritmus je popsán a dokázán v mnoha knihách (a skriptech), kupř. Kapitoly z diskrétní matematiky nebo Algebraické algoritmy (Kučera, Nešetřil)...
- Konečnost: V každé iteraci odstraníme z "fronty" jeden vrchol, který se v ní už neobjeví
  (protože mezi vrcholy ve frontě měl nejmenší vzdálenost od startu a vzdálenosti jsou nezáporné).
- Parciální správnosti pomůže invariant:
  V každém kroku evidujeme nejkratší cesty ze startu používající pouze vrcholy již odstraněné z "fronty".
- Z invariantu plyne korektnost.
- Jde jen o modifikovaný algoritmus vlny, tedy hledání do šířky!

Analýza

- Algoritmus je popsán a dokázán v mnoha knihách (a skriptech), kupř. Kapitoly z diskrétní matematiky nebo Algebraické algoritmy (Kučera, Nešetřil)...
- Konečnost: V každé iteraci odstraníme z "fronty" jeden vrchol, který se v ní už neobjeví
  (protože mezi vrcholy ve frontě měl nejmenší vzdálenost od startu a vzdálenosti jsou nezáporné).
- Parciální správnosti pomůže invariant:
  V každém kroku evidujeme nejkratší cesty ze startu používající pouze vrcholy již odstraněné z "fronty".
- Z invariantu plyne korektnost.
- Jde jen o modifikovaný algoritmus vlny, tedy hledání do šířky!
- Složitost významně závisí na reprezentaci grafu a na reprezentaci "fronty"!

Poznámky

- Pokud jde o graf neohodnocený (délka všech hran je 1), potom se z Dijkstrova algoritmu stane obyčejný algoritmus vlny.

Poznámky

- Pokud jde o graf neohodnocený (délka všech hran je 1), potom se z Dijkstrova algoritmu stane obyčejný algoritmus vlny.
- Aplikace grafových algoritmů: Zde začíná teoretická informatika. :-)

Poznámky

- Pokud jde o graf neohodnocený (délka všech hran je 1), potom se z Dijkstrova algoritmu stane obyčejný algoritmus vlny.
- Aplikace grafových algoritmů: Zde začíná teoretická informatika. :-)
- Příklady využití grafových algoritmů:

Poznámky

- Pokud jde o graf neohodnocený (délka všech hran je 1), potom se z Dijkstrova algoritmu stane obyčejný algoritmus vlny.
- Aplikace grafových algoritmů: Zde začíná teoretická informatika. :-)
- Příklady využití grafových algoritmů:
- Thesseus a Minotaurus,

Poznámky

- Pokud jde o graf neohodnocený (délka všech hran je 1), potom se z Dijkstrova algoritmu stane obyčejný algoritmus vlny.
- Aplikace grafových algoritmů: Zde začíná teoretická informatika. :-)
- Příklady využití grafových algoritmů:
- Thesseus a Minotaurus,
- Král (či jiné figurky) na šachovnicích různých tvarů s různě pozakazovanými políčky,

Poznámky

- Pokud jde o graf neohodnocený (délka všech hran je 1), potom se z Dijkstrova algoritmu stane obyčejný algoritmus vlny.
- Aplikace grafových algoritmů: Zde začíná teoretická informatika. :-)
- Příklady využití grafových algoritmů:
- Thesseus a Minotaurus,
- Král (či jiné figurky) na šachovnicích různých tvarů s různě pozakazovanými políčky,
- ...

Grafově-optimalizační problémy

- Jak grafy prohledávat – také bylo (do šířky a do hloubky), nyní umíte též implementovat.

Grafově-optimalizační problémy

- Jak grafy prohledávat – také bylo (do šířky a do hloubky), nyní umíte též implementovat.
- Hledání nejkratší cesty, minimální kostra,

Grafově-optimalizační problémy

- Jak grafy prohledávat – také bylo (do šířky a do hloubky), nyní umíte též implementovat.
- Hledání nejkratší cesty, minimální kostra,
- topologické uspořádání, faktorová množina (vyšetřování komponent).

Grafově-optimalizační problémy

- Jak grafy prohledávat – také bylo (do šířky a do hloubky), nyní umíte též implementovat.
- Hledání nejkratší cesty, minimální kostra,
- topologické uspořádání, faktorová množina (vyšetřování komponent).
- Modifikace problémů: Maximální kostra, nejdelší cesta – čím se liší?

Nejkratší cesta

- **Dijkstrův algoritmus:** Modifikované prohledávání do šířky (netvoříme frontu nalezených vrcholů, ale strukturu organizujeme podle doby, kdy se do dotyčného vrcholu dostaneme).

Nejkratší cesta

- **Dijkstrův algoritmus:** Modifikované prohledávání do šířky (netvoříme frontu nalezených vrcholů, ale strukturu organizujeme podle doby, kdy se do dotyčného vrcholu dostaneme).
- Povšimněte si, že se vlastně jedná o diskrétní simulaci (rozlijeme vodu na graf a čekáme, kdy voda doteče do jednotlivých vrcholů).

Nejkratší cesta

- **Dijkstrův algoritmus:** Modifikované prohledávání do šířky (netvoříme frontu nalezených vrcholů, ale strukturu organizujeme podle doby, kdy se do dotyčného vrcholu dostaneme).
- Povšimněte si, že se vlastně jedná o diskrétní simulaci (rozlijeme vodu na graf a čekáme, kdy voda doteče do jednotlivých vrcholů).
- **Bellman-Fordův algoritmus:** $n - 1$-krát zopakujeme: Z každého vrcholu zkus "natáhnout" cestu po všech hranách z něj vycházejících (tedy zlepši případnou nalezenou cestu).

Nejkratší cesta

- **Dijkstrův algoritmus:** Modifikované prohledávání do šířky (netvoříme frontu nalezených vrcholů, ale strukturu organizujeme podle doby, kdy se do dotyčného vrcholu dostaneme).
- Povšimněte si, že se vlastně jedná o diskrétní simulaci (rozlijeme vodu na graf a čekáme, kdy voda doteče do jednotlivých vrcholů).
- **Bellman-Fordův algoritmus:** $n - 1$-krát zopakujeme: Z každého vrcholu zkus "natáhnout" cestu po všech hranách z něj vycházejících (tedy zlepši případnou nalezenou cestu).
- Algoritmus funguje i při záporném ohodnocení hran, nesmí ale být přítomna záporná kružnice (kružnice záporné délky).

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!
- Pro trojici (a, u, v), kde u, v jsou vrcholy a a přirozené číslo počítáme nejkratší cestu z u do v o nejvýše a hranách.

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!
- Pro trojici (a, u, v), kde u, v jsou vrcholy a a přirozené číslo počítáme nejkratší cestu z u do v o nejvýše a hranách.
- Postupujeme pro rostoucí a (projdeme všechny možné dvojice) tak, že natahujeme cestu o jedna kratší o "poslední" hranu.

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!
- Pro trojici (a, u, v), kde u, v jsou vrcholy a a přirozené číslo počítáme nejkratší cestu z u do v o nejvýše a hranách.
- Postupujeme pro rostoucí a (projdeme všechny možné dvojice) tak, že natahujeme cestu o jedna kratší o "poslední" hranu.
- Jako by vybízelo k rekurzi...

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!
- Pro trojici (a, u, v), kde u, v jsou vrcholy a a přirozené číslo počítáme nejkratší cestu z u do v o nejvýše a hranách.
- Postupujeme pro rostoucí a (projdeme všechny možné dvojice) tak, že natahujeme cestu o jedna kratší o "poslední" hranu.
- Jako by vybízelo k rekurzi...
- ... jenže jako obvykle velmi neefektivní.

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!
- Pro trojici (a, u, v), kde u, v jsou vrcholy a a přirozené číslo počítáme nejkratší cestu z u do v o nejvýše a hranách.
- Postupujeme pro rostoucí a (projdeme všechny možné dvojice) tak, že natahujeme cestu o jedna kratší o "poslední" hranu.
- Jako by vybízelo k rekurzi...
- ... jenže jako obvykle velmi neefektivní.
- Tedy ji vybavíme cachí v podobě třírozměrného pole...

Floyd – Warshallův algoritmus

aneb all-pairs shortest paths

- Další příklad dynamického programování!
- Pro trojici (a, u, v), kde u, v jsou vrcholy a a přirozené číslo počítáme nejkratší cestu z u do v o nejvýše a hranách.
- Postupujeme pro rostoucí a (projdeme všechny možné dvojice) tak, že natahujeme cestu o jedna kratší o "poslední" hranu.
- Jako by vybízelo k rekurzi...
- ... jenže jako obvykle velmi neefektivní.
- Tedy ji vybavíme cachí v podobě třírozměrného pole...
- ... a zjistíme, že rekurzi vůbec nepotřebujeme, že postačí čtyři cykly v sobě...

Floyd – Warshallův algoritmus pseudokód

```
for(a=0;a<n=1;a++)
   foreach(u in vrcholy)
      foreach(v in vrcholy)
         foreach(w in sousedi(v))
            cache[a,u,v]=min(cache[a,u,v],cache[a-1,u,w]+
                 length(w,v));
```

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami
- Cíl: Kostra s minimální váhou.

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami
- Cíl: Kostra s minimální váhou.
- Algoritmy: Kruskal, Borůvka, Jarník, Prim.

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami
- Cíl: Kostra s minimální váhou.
- Algoritmy: Kruskal, Borůvka, Jarník, Prim.
- Kruskalův: Setřiď hrany podle váhy, postupně zkoušej přidávat a koukej, zda jsme vytvořili kružnici (pokud ano, hranu nepřidej, jinak přidej).

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami
- Cíl: Kostra s minimální váhou.
- Algoritmy: Kruskal, Borůvka, Jarník, Prim.
- Kruskalův: Setřiď hrany podle váhy, postupně zkoušej přidávat a koukej, zda jsme vytvořili kružnici (pokud ano, hranu nepřidej, jinak přidej).
- Borůvkův: Spojování komponent souvislosti: Vyber hranu s nejmenší vahou, která vychází z dané komponenty a přidej.

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami
- Cíl: Kostra s minimální váhou.
- Algoritmy: Kruskal, Borůvka, Jarník, Prim.
- Kruskalův: Setřiď hrany podle váhy, postupně zkoušej přidávat a koukej, zda jsme vytvořili kružnici (pokud ano, hranu nepřidej, jinak přidej).
- Borůvkův: Spojování komponent souvislosti: Vyber hranu s nejmenší vahou, která vychází z dané komponenty a přidej.
- Jarníkův (Primův): Pěstování stromu: K dosud postavenému stromu přidej hranu z něj vycházející, která má nejnižší váhu.

Minimální kostra

- Vstup: Graf s ohodnocenými hranami
- Cíl: Kostra s minimální váhou.
- Algoritmy: Kruskal, Borůvka, Jarník, Prim.
- Kruskalův: Setřiď hrany podle váhy, postupně zkoušej přidávat a koukej, zda jsme vytvořili kružnici (pokud ano, hranu nepřidej, jinak přidej).
- Borůvkův: Spojování komponent souvislosti: Vyber hranu s nejmenší vahou, která vychází z dané komponenty a přidej.
- Jarníkův (Primův): Pěstování stromu: K dosud postavenému stromu přidej hranu z něj vycházející, která má nejnižší váhu.
- Všechny algoritmy počítají to samé.

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...
- ... změň na každé hraně váhu z v_i na $-v_i$.

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...
- ... změň na každé hraně váhu z v_i na $-v_i$.
- Hledání nejdelší cesty...

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...
- ... změň na každé hraně váhu z v_i na $-v_i$.
- Hledání nejdelší cesty...
- ... těžké (NP-těžké).

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...
- ... změň na každé hraně váhu z v_i na $-v_i$.
- Hledání nejdelší cesty...
- ... těžké (NP-těžké).
- Proč? Protože víme, kolik hran má kostra, ale nevíme, kolik hran má cesta.

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...
- ... změň na každé hraně váhu z v_i na $-v_i$.
- Hledání nejdelší cesty...
- ... těžké (NP-těžké).
- Proč? Protože víme, kolik hran má kostra, ale nevíme, kolik hran má cesta.
- Tudíž i nalezení nejkratší cesty v (potenciálně záporně) ohodnoceném grafu je těžké (NP-těžký problém):

Modifikace

- Hledání nejtěžší kostry...
- ... změň na každé hraně váhu z v_i na $-v_i$.
- Hledání nejdelší cesty...
- ... těžké (NP-těžké).
- Proč? Protože víme, kolik hran má kostra, ale nevíme, kolik hran má cesta.
- Tudíž i nalezení nejkratší cesty v (potenciálně záporně) ohodnoceném grafu je těžké (NP-těžký problém):
- Sedí za ním schovaná Hamiltonskost, tedy hledání cesty délky $n - 1$:

Modifikace II

- Vytvoř úplný graf, za hranu v původním grafu přidej hranu s váhou -1,
  za nehranu přidej hranu s váhou 1.

Modifikace II

- Vytvoř úplný graf, za hranu v původním grafu přidej hranu s váhou -1,
  za nehranu přidej hranu s váhou 1.
- Zkus všechny dvojice: Má pro nějaké nejkratší desta váhu $-n+1$?

Modifikace II

- Vytvoř úplný graf, za hranu v původním grafu přidej hranu s váhou -1,
  za nehranu přidej hranu s váhou 1.
- Zkus všechny dvojice: Má pro nějaké nejkratší desta váhu $-n+1$?
- Těžkost problému spočívá v tom, že s jeho pomocí jsme schopni vyřešit jiný problém (který máme za těžký).

Grafy s geometrickými reprezentacemi...

...nám umožňují efektivně řešit problémy v obecném případě těžké.

Delegáty

- Chceme-li předat jako parametr funkci, uděláme tzv. delegáta.
- Delegáta reprezentuje proměnná/parametr. Do delegáta přiřazujeme funkci (pointer).
- Využití: Máme databázi (např. studentů), kterou chceme třídit dle různých kritérií.
- Třídicí funkci napíšeme jednu, jako parametr jí předáme komparátor.

Syntaktické prostředky

- Definujeme datový typ delegát:
  `delegate bool JeVetsi(object Co,object NezCo);`
- Definujeme proměnnou příslušného typu:
  `JeVetsi IntPor=FunkcePorovnavajiciInteger;`
- Předání funkce v parametru:
  `static void setrid(object[]Co,JeVetsi PodleCeho);`

Anonymní funkce

- Chceme-li funkci použít jen jednoúčelově (například předat jako delegáta), nemusíme ji pojmenovávat.
- Obdobně s třídou, se kterou chceme pracovat jen na jednom místě.
- `JeVetsi IP=delegate (object Co, object NezCo){.....}`
- Anonymní mohou být i třídy (ale do těch nebudeme břednout).

Příklad

```
public delegate bool JeVetsi(object Co,object NezCo);
static void setrid(object[]Co,JeVetsi PodleCeho)
{  int i;
   bool prohazovano=true;
   object pom;
   while(prohazovano)
   {  prohazovano=false;
      for(i=0;i<Co.Length-1;i++)
      {  if(PodleCeho(Co[i],Co[i+1]))
         {  pom=Co[i];
            Co[i]=Co[i+1];
            Co[i+1]=pom;
            prohazovano=true;
} } } }
```

Příklad

```
static void Main()
{  object[]a={5,4,3,2,1};
   int i;
   JeVetsi IntPor=delegate(object Co,object NezCo)
         {return ((int)Co)>((int)NezCo);};
   setrid(a,IntPor);
   for(i=0;i<a.Length;System.Console.Write("{0}
",a[i++]));
   System.Console.WriteLine();
}
```

Vlákna

- V každém správném počítači žijí procesy.
- V chráněném režimu má každý proces dojem, že je v paměti sám.
- Vlákna běží v rámci jednoho procesu, tedy mají společnou paměť.
- Umožňují spustit kód z více míst najednou.
- Využití: Producent-konzument problém (producent nezávisle produkuje, konzument to průběžně zpracovává), paralelizace (je-li problém paralelizovatelný).

Technické prostředky

jen ukázka

- Třída `Thread` (v `System.Threading`)
- reprezentuje rozběhnutelné vlákno.
- Jako parametr konstruktoru dáme delegát (funkci, kterou chceme spustit v dotyčném vlákně).
- Delegát (funkce běžící ve zvláštním threadu) nebere parametry a nic nevrací.
- Thread spustíme zavoláním metody `Start`.
- `Thread.CurrentThread` – současné vlákno (užitečné informace).

Příklad

```
static void makej()
{  while(true)
   {  Console.WriteLine("Makam, az se ze me kouri!");
      Thread.Sleep(500);
   }
}
static void Main()
{  Thread t=new Thread(makej);
   t.Start();
   while(true)
   {  Console.WriteLine("Cekam, az se vlakno
vyjadri...");
      Thread.Sleep(2000);
   }
}
```

Konec

...děkuji za pozornost...

Otázky?