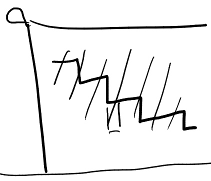
Báze a dimenze

1) Zjistit dimenzi podprostoru generovaného vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$

2) Najít bázi daného vektorového prostoru

3) Doplnit lin. nezávislou množinu na bázi

zjistit hodnost matice

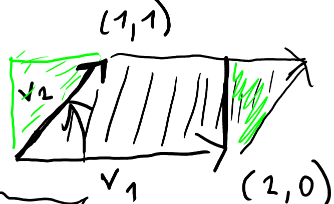


---

1)

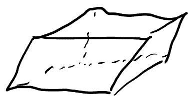
4) Doplňující poznámka: co počítá determinant? (v $\mathbb{R}^n$)

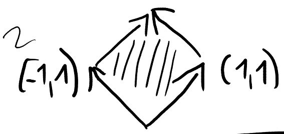
Jaký je obsah tohoto rovnoběžníku?



$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2$$





Vyjádřete vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ jako lin. kombinaci vektorů $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Chceme najít x, y, z takové, že

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

, tedy řešíme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_7$ v $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dimenze řešení je 4

báze např.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_7 = 1$ $\quad$ $3x_6 + x_7 = 0$

$$x_6 = \frac{-1}{3} = \frac{4}{3} = 4 \cdot 2 = 3$$

$(\dim U) + (\dim W) = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$ — Věta o dimenzi spojení a průniku

Př $U = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$

$W = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\dim U = 2$

$U \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&2&2\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \cdot 2\\ \cdot 3\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&2\\1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&4&3\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \cdot 3\\ \cdot 4\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$W \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \dim W = 2$

$U + W$ dáme zjednodušené matice $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&1\\0&2&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \dim(U+W) = 3$

$\Rightarrow$ dle Věty o dimenzi spojení a průniku $\dim(U \cap W) = 1$

Chci-li $U \cap W$ skutečně určit x, y, u, w $\quad x \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \underbrace{u \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$

$[V]_B \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \qquad a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$

$B' = (v_1+v_4, v_2+v_3, v_4, v_2)$

Co kdyby vektor u měl v bázi B' souřadnice (a_1, a_2, a_3, a_4) jaké souřadnice by měl v bázi v_1, v_2, v_3, v_4?

$\vec{u} = a_1(v_1+v_4) + a_2(v_2+v_3) + a_3v_4 + a_4v_2$

$[u]_{B'} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$[u]_B = (a_1, a_2+a_4, a_2, a_1+a_3)$

Tedy souřadnice $[u]_B$ se získají ze souřadnic $[u]_{B'}$ násobením maticí $A = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ — matice, ve které jsou souřadnice vektorů báze B' vyjádřené v bázi B $\rightarrow$ matice přechodu

$[u]_B = A \cdot [u]_{B'}$

$A^{-1}[u]_B = [u]_{B'}$

(A se značí $[id]^{B'}_{B}$)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&0 \end{array}\right) -$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&-1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&-1&0 \end{array}\right) \qquad [id]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ -1&0&0&1\\ 0&1&-1&0 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{B'} = [id]_{B'}^{B}[v]_{B}$$

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ -1&0&0&1\\ 0&1&-1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4 \end{pmatrix}$$

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in$ definiční obor