Konstrukce GF(4)

+	0	1	a	a+1
0	0	1	a	a+1
1	1	0	a+1	a
a	a	a+1	0	1
a+1	a+1	a	1	0

·	0	1	a	a+1
0	0	0	0	0
1	0	1	a	a+1
a	0	a	a+1	1
a+1	0	a+1	1	a

$$(a+1)(a+1) = a(a+1) + 1(a+1) =$$
$$= a \cdot a + a \cdot 1 + 1 \cdot a + 1$$
$$= (a+1) + a + a + 1 = a$$
$$= a + (1+1)(1+a) = a$$
$\Rightarrow$ buď $1+1=0$ nebo ~~$1+a=0$~~

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zjistěte zda jsou l.n.

vektory jsou LN

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Netriviální lin. kombinace je nenulové řešení

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>vektory</u> jsou LZ pokud existuje nenulová lineární kombinace, která se sečte na 0.

v_1, v_2, v_3 $\quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$

$\underline{a_1 = 1}, \ \underline{a_2 = -1}, \ \underline{a_3 = 1}$

$v_1 - v_2 + v_3 = 0$

$X \subseteq Y \subseteq V$

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ... nezávislá

$Y = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$

$2v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Y je L.Z.
a X ne.

8.4) vektory $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$? jsou ~~LZ~~ LN nad $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \underline{\underline{\text{LN}}}$$

$\mathbb{Z}_3^4$ jsou LZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.6 b) Hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a(x^2+2x+3) + b(x+1) + c(x-1) = 0$$

Koeficient u x^2 : $ax^2 \equiv 0 \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}$

u x : $(b+c)x \equiv 0 \Rightarrow \underline{\underline{b=-c}}$

absolutní člen : $b + c(-1) \equiv 0$

$2b \equiv 0 \Rightarrow \underline{\underline{b=0}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{c=0}}$

jediná lineární kombinace, která dá nulový vektor je ta triviální

$\Rightarrow$ vektory jsou LN

x^2	x	1
1	2	3
0	1	1
0	1	-1

---

e) $\ln x$, $\log_{10}(2x)$, $\log_2 (x)^2$

$\ln x$

$\log_2 (x)^2 = \dfrac{2 \ln x}{\ln 2} = \dfrac{2}{\ln 2} \cdot \ln x$

tedy třetí vektor je násobkem toho prvního $\Rightarrow$ LZ

$\log_b a = \dfrac{\log_x a}{\log_x b}$

$\log a^n = n \log a$

d) $\sin(x+1)$ $\sin(x+2)$ $\sin(x+3)$

$\sin(x+1) = \underline{\sin x} \cos 1 + \sin 1 \underline{\cos x}$

$\sin x$
$\cos x$

$\sin(x+1)$ $\sin(x+2)$ $\sin(x+3)$ $\Rightarrow \underline{\underline{LZ}}$

$\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos 1 \\ \sin 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos 2 \\ \sin 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos 3 \\ \sin 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \sin 1 & \sin 2 & \sin 3 \end{pmatrix}$

nenulové řešení? má

$\Rightarrow \underline{\underline{má}}$