# Vektorové prostory a podprostory

## Grupy $(G, \cdot)$

Není grupa: $\{f : X \to Y\}$

$\{f : X \to X\}$ není; jde pouze o monoid

$\{1,2\}$

$f : x \mapsto 1$ nemá inverz

$\{f : X \to X \,;\, f \text{ je bijekce}\}$

---

Vektorový prostor nad $T$ je abelovská grupa kde máme pro $\forall r \in T \ \forall v \in V$ $r \cdot v \in V$.

+ chová se rozumně: $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$

$(r \cdot s) \cdot u = r \cdot (s \cdot u)$ $\quad (r + s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u$

$1 \cdot u = u$ $\quad 0 \cdot v = 0$

---

## Příklady

1) • $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$; ✓

• $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ ✓

• reálná čísla můžeme sčítat $(\mathbb{R}, +)$ je abelovská grupa

• reálné číslo můžeme přenásobit racionálním číslem ($+ \ \cdot$ se chová hezky)

• $\mathbb{R}$ jsou v.p. nad $\mathbb{Q}$

• všechny funkce z $X$ do $\mathbb{R}$ je v.p.? ✓ nad $\mathbb{R}$

• všechny posloupnosti racionálních čísel ✓ nad $\mathbb{Q}$

2) $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4 \ldots$

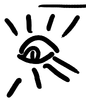
$(a, b)$

$r \cdot (a, b) := (ra, rb)$

$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

---



$\left.\begin{array}{l} Ax = 0 \\ Ay = 0 \end{array}\right\}$ $A(x+y) = 0$

$A(r \cdot x) = r \cdot 0 = 0$

Kdy je $\{(x,y,z) : x+2y-3z=a\}$ v. podprostorem $\mathbb{Z}_7^3$?

- Musí obsahovat neutrální prvek vůči sčítání, tedy prvek $(0,0,0)$

$\Rightarrow 0+2\cdot 0-3\cdot 0 = a \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}$

Jde o řešení soustavy homogenní rovnic $(1 \; 2 \; -3)$

$\Rightarrow$ Pokud $a=0$ o v.p. jde.

Kolik má prvků? $x+2y-3z=0$ Kolik má řešení? $\sim GF(7)$

---

$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \{ \sum a_i v_i \mid a_i \in T \}$

nejmenší v.p. obsahuje všechny vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$

Kdyby $X$ byla nekonečná množina vektorů $\langle X \rangle$

---

Průnik $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$v \in \cap \dots \Rightarrow \underline{\underline{v}} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v = y_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vlastně řešíme $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ a z řešení dostat možné hodnoty $v$.

~~Kdyby~~
$x_1 = 2\cdot x_2 + x_3$

$x_2, x_3$ libovolné

$(2x_2+x_3)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= x_2 \cdot (\vec{v}) + x_3 (\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

Prvně vyřešíme soustavu $Ax = 0$

vyjde množina řešení

$$\left\{ r\begin{pmatrix}1\\6\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\6\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Krok 1

$$\left\langle \underset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\6\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{x_2}{\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}} \right\rangle \cap \left\langle \underset{-y_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{-y_2}{\begin{pmatrix}0\\2\\3\\1\end{pmatrix}}, \underset{-y_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}\cancel{1}\\6\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 6 & 4 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \overset{\text{REF}}{\sim}$$