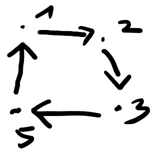
Cvičení Lineární algebra

5. 11. 2020

1) Symetrická grupa, permutace

a) Rozložte na součin nezávislých cyklů

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 9 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$



$\to (1\,2\,3\,5)(4\,7\,6)(8\,9\,11\,10)$

$\mathrm{sgn} = (-1) \cdot (1) \cdot (-1) = \underline{\underline{+1}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$(1\,2\,3\,4\,5)(6) = \underline{\underline{(12345)}}$

b) Znásobte permutace

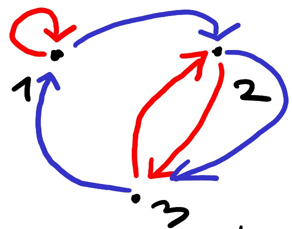
$(1\,2\,3) \circ (3\,2\,1) = (1)(2)(3) = id$

$(1\,2\,3) \circ (2\,3) = (1\,2)(3) = (1\,2)$

$(2\,3) \circ (1\,2\,3) = (1\,3)$

c) Určete znaménka permutací z předchozího příkladu $\quad \mathrm{sgn}\,\sigma$

první červenou šipku, pak podle modré



cyklus σ $\quad \mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{\text{délka cyklu}+1}$

součin cyklů $\quad \mathrm{sgn}\,\sigma$ = součin znamének

součin permutací ... $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\pi)$

2) Determinant

a) Spočtěte

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{vmatrix} \qquad 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{vmatrix} \qquad 0 \text{ (je-li definován)}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad 96$$

d)

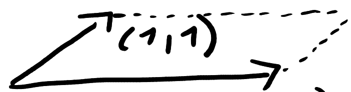
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad -1$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & & 0 \end{vmatrix} \qquad n!$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

A matice $n \times n$



obsah $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

Výpočet: • Gaussova eliminace
+ lze provádět sloupcové úpravy

→ • prohození řádek změní znaménko det A

• vynásobení řádku α vynásobí det A číslem α

• přičtení α násobku řádku k jinému řádku det A nezmění.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3+12) = -15$$

- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Sarrusovo pravidlo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - fha - bdi$$

$$1\cdot 2\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - (1\cdot 1\cdot 1) - 2\cdot 0\cdot(-1) =$$
$$= -2 + 6 + 0 - 18 - 1 = \underline{\underline{-15}}$$

Rozvoj dle řádku

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{b} & \overset{+}{c} \\ \overset{-}{d} & \overset{+}{e} & \overset{-}{f} \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

To samé pro sloupce

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + \log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c + \log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a - \log_b a\cdot\log_a b - \log_c a\cdot\log_a c - \log_c b\cdot\log_b c$$

$$\log_a c = \frac{\log c}{\log a}$$

$$= 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 48 \cdot 2 = \underline{\underline{96}}$$

---

e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \cdots & n-1 \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & & n-2 & 0 \end{pmatrix} + \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & & & 2n-1 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & & & 2n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & & 2n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & n \end{pmatrix}$$

- dostali jsme horní ~~d~~ trojúhelníkovou matici s čísly $1, 2, 3, \ldots, n$ na diagonále

→ det A je tedy jejich součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$