Cvičení lineární algebra

- rank matice
- regulární matice
- výpočty inverzních matic

1) Zjistěte rank $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Pokud je regulární, určeme inverzní matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1}\ (A|I) \quad (I|A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim -1\cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \cdot\tfrac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \underline{A^{-1}}$$

rank $A = 3$ je regulární

b) Kdy je horní trojúhelníková matice regulární?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \text{nejsou regulární}$$

$\Leftrightarrow a_{11} \neq 0 \wedge a_{22} \neq 0 \wedge \ldots \wedge a_{nn} \neq 0$ | A je čtvercová

$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ c) Co dolní Δ-matice?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \cdots & a_{22} & 0 \\ \cdots & \cdots & a_{33} \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 39 \\ 1 & 4 & 14 \\ -2 & -5 & -18 \end{pmatrix}$ Spočtěte A^{-1}, pokud existuje

e) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -17 & -50 \end{pmatrix}$ B^{-1}?

f) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 11 & -16 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

C^{-1}? pokud existuje

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 11 & 39 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -18 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 39 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -18 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -42 & 99 & -14 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & -24 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \cdot(-1)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & -24 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 3 & -2 \\ -10 & 24 & -3 \\ 3 & -7 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$

e) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -9 & -15 & -8 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

f) C^{-1} neexistuje

---

g) Buď $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \end{pmatrix}$ pro každé n.

Určete A_n^{-1}, pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$A_1 = (1) \qquad A_1^{-1} = 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obecně?

h) Buď $\varphi \in \mathbb{R}$ $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Spočtěte A_φ^{-1}.

$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \cdots & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \cdots & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \cdots & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \cdots & 5 & \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \cdots & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \cdots & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & & & \ddots & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & \end{array}\right)$

$$\begin{array}{r} -1 \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \vdots \end{array}\left(\begin{array}{cccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \cdots & & & & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & & & & -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & & & & & n-1 & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{array}\right) \sim$$

post-pně, indukcí

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & & & 0 \\ I_n & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ & & & & & \ddots & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0\ 0\ 0 \cdots 0 & 2 & -1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0 & & -1 & \\ 0 & A_{n-1} & -1 & I_{n-1} \\ 0 & & -1 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & -1 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 2 & -1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ -1 & \\ 0 & \\ 0 & A_{n-1}^{-1} \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\varphi \in \mathbb{R}$

$\cos\varphi = 0 \ \ldots\ \sin\varphi = \pm 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sin\varphi = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sin\varphi = 0 \ \ldots\ \cos$

$$\cos\varphi = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = -1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \cdot\sin\varphi \\ \cdot\cos\varphi \end{array}\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1\times \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi & -\sin\varphi & 1 & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\sin\varphi \\ \cdot\cos\varphi \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & +\cos^2\varphi & 0 & \cos\varphi \end{array}\right)$$

$$\sim \ \sin\varphi : \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1} & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi & -\sin\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\sin\varphi \end{array}$$

$$:\cos\varphi \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi & 0 & 1-\sin^2\varphi & \cos\varphi\cdot\sin\varphi \\ 0 & 1 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 1 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right)$$

$$\forall\varphi \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{geometricky ... otočení o } \varphi \text{ stupňů}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

Rychlý způsob jak spočítat $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Zjednodušte: $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} =$

A, B čtvercové $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 26 & 357 \\ 98 & 39 & 1046 \end{pmatrix}$$