3 Operace s maticemi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix} = A \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,n} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1}+b_{k,1} & \dots & a_{k,n}+b_{k,n} \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$
- $\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha A \qquad \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \dots & \alpha a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{k,1} & \dots & & \alpha a_{k,n} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Spočtěte: $\underline{(-1)\cdot A} + 2 \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}$$

$\underline{Ax = b}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right) \dots \begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 2 \\ 0x + 1y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

Vyřešte rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a proveďte zkoušku násobením matic

$z = 2$

$y \in \mathbb{R}$ libovolné

$x = -1 - y$

$\begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-t\\t\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot(-1-t)+1\cdot t+2\cdot 2\\1\cdot(-1-t)+1\cdot t+1\cdot 2\\2\cdot(-1-t)+2\cdot t+0\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} \checkmark$$

Vyřešete soustavu rovnic $Ax=b$, kde

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\1&-5&4\\-3&1&2\end{pmatrix} \quad a)\ b=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} \quad b)\ b=\begin{pmatrix}-9\\13\\3\end{pmatrix}$$

$$c)\ b=\begin{pmatrix}1\\5\\-15\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-3&-1&-9&1\\1&-5&4&1&13&5\\-3&1&2&-3&3&-15\end{array}\right)\sim$$ prohodíme 1. dva řádky

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&4&1&13&5\\0&2&-3&-1&-9&1\\-3&1&2&-3&3&-15\end{array}\right)3x \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&4&1&13&5\\0&2&-3&-1&-9&1\\0&-14&14&0&42&0\end{array}\right) :14$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&4&1&13&5\\0&2&-3&-1&-9&1\\0&-1&1&0&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&4&1&13&5\\0&-1&1&0&3&0\\0&2&-3&-1&-9&1\end{array}\right) 2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&4&1&13&5\\0&-1&1&0&3&0\\0&0&-1&-1&-3&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \cdot -1\\ \cdot -1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&4&1&13&5\\0&1&-1&0&-3&0\\0&0&1&1&3&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}-4\\ +1\\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-5&0&-3&1&9\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&3&-1\end{array}\right) 5x \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&16&4\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&3&-1\end{array}\right)$$

Důkazy: Pokud chceme něco ověřit,

a) když neplatí, stačí najít jeden protipříklad

b) jinak musíme ukázat na základě definic a faktů, co už známe

Dokažte:

$\forall$ matice $n \times m$ platí $(A+B)+C = (A+(B+C))$

- dobře definováno
- $A+B =: X$ $\qquad B+C =: Y$

$(A+B)+C =: U$ $\qquad A+(B+C) =: V$

$X_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$

$U_{i,j} = X_{i,j} + C_{i,j} = (A_{i,j} + B_{i,j}) + C_{i,j}$

$V_{i,j} = A_{i,j} + (B_{i,j} + C_{i,j})$

Takže U a V jsou totožné. ✓

$A^T = A$ $\quad$ A^T vznikne z A záměnou řádků a sloupců

a) Platí pro čtvercové symetrické matice $A \cdot B = B \cdot A$?

b) Platí pro $\forall$ matice A, B, C: $A(B+C) = AB + AC$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) neplatí

~~násobení~~ násobení zleva odpovídá řádkovým úpravám matic, zprava sloupce

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ prohození 1. a 2. řádky, 1. a 2. sloupce}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b) „Platí" pokud je vše definováno

$\forall$ matice A, B platí $\quad \ldots$ kdyby B a A nešly sečíst

$$A + \underbrace{B - B} = A$$

$$A = A$$

nedefinovaný výraz $\neq A$