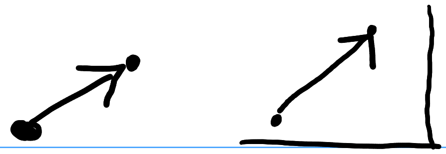
Afinní prostory



- body

~ přímky, rovnoběžnost, mimoběžky, ...

~ těžiště

Př) Najdete těžiště trojúhelníka s vrcholy $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ a $(1,0,0)$

Př) Dokažte, že řešení rovnice $Ax = c$ tvoří afinní prostor.

Těžiště $A_1, A_2, \dots, A_n$ body

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}{n}$$

co kdyby „bod" A_1 „vážil" 2x více?

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \rightsquigarrow \frac{2A_1 + A_2 + A_3}{4}$$

Př 2)

$$\begin{aligned} Ax &= c \\ Ay &= c \\ \hline A(x-y) &= 0 \end{aligned}$$

neboli $x - y \in \underbrace{\operatorname{Ker} A}_{\text{v.p.}}$

$$\begin{aligned} Ax &= c \\ Ay_0 &= 0 \\ \hline A(x+y_0) &= c \end{aligned}$$

$y_0 \in \operatorname{Ker} A$

neboli $x + y_0$ řeší původní rovnici

$$A = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

do A patří bod tvaru $\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}}_{\text{vektor}} x + \underset{\text{bod}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}} = \underset{\text{bod}}{\overrightarrow{\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}}}$

čili hledáme zda $\exists$ řešení $\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 5\\3 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{array}\right)$

$M = $ afinní obal $\left\{\underline{\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-7\\-7\end{pmatrix}\right\}$ .... ~~rovina~~ přímka v $\mathbb{R}^3$

$N = \underline{\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right\}} + \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ .... rovina v $\mathbb{R}^3$

Rovina a přímka:

a) přímka leží v rovině

b) přímka rovinu protíná v jednom bodě

c) jsou rovnoběžné a nemají spol. bod

M popíšeme jako $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-7\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-4\\-5\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

Test v.p. $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$= -5\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\+5\end{pmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow$ ona přímka je s danou rovinou rovnoběžná (či v ní leží)

$$\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\\-1 & 0\end{pmatrix} y + \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\4 & -1 & -3\\5 & 1 & 0\end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

pokud $\exists$ řešení daná přímka v oné rovině leží; jinak

A najít vektory $v \neq \phi$ takové, že

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)}_{\det(A-\lambda I)=0} v = 0$$

Co byste měli umět

1) Definice (ať víte, o čem je řeč)
2) Matice a operace s nimi (násobení, kdy se dvě matice dají znásobit, ...)
3) Gaussova eliminace (nad různými tělesy)
4) Poznat vztah dvou vektorových/afinních podprostorů, spočítat jejich dimenzi

Např. Vyjděme vztahy span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ a span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ jsou

Jak v podobných případech využít RREF.

Př. 4) Průnik afinních podprostorů je afinní podprostor či ϕ.

a) $A \cap B$ je ϕ v

b) $A \cap B$ není ϕ $\Rightarrow$ v tom případě $\exists c \in A \cap B$

$A = c + V$ V v.p.

$B = c + W$ W v.p.

$d \in A \cap B$ $d \in A$ $d = c + v$ $v \in V$

$\underline{\underline{A \cap B = c + (V \cap W)}}$ $d \in B$ $\underline{d = c + w}$ $w \in W$

$v = w \Rightarrow v = w \in V \cap W$

$\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\8\\-10\end{pmatrix}$ chceme, aby tato byla řešením soustavy rovnic

Vyřešíme $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\4 & 8 & -10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\0 & 0 & -22\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Řešením této rovnice tedy je span$\{(2\ {-1}\ 0)\}$.
To je zároveň i hledaný systém rovnic:

$$(2\ {-1}\ 0)x = 0$$

(vyšlo-li by řešení vícedimenzionální, bude mít ona matice více řádků)

Zk: $(2\ {-1}\ 0)\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 0$

$(2\ {-1}\ 0)\begin{pmatrix}4\\8\\-10\end{pmatrix} = 0$ (z konstrukce) platí