Lineární zobrazení

a) Poznat, jestli zobrazení je lineární

Je $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f: (x, y, z) \longmapsto (x-y, z+x)$ lineární zobrazení?

Řešení DÚ 8/3. příklad

a) $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou LN

$\Uparrow$

b) $v_1, v_2+v_1, v_1+v_2+v_3, \dots, v_1+v_2+\dots+v_n$ jsou LN

Kdyby b bylo LZ $\exists$ lin. kombinace (netriviální)

$v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+\dots+v_n$ a sečte se na nulu

$$a_1v_1 + a_2(v_1+v_2) + \dots + a_n(v_1+\dots+v_n) = 0$$

a ne všechny $a_i = 0$

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)v_1 + (a_2+a_3+\dots+a_n)v_2 \dots + a_nv_n = 0$$

$\Rightarrow$ netriviální kombinace $v_1, \dots, v_n$

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$$

$\rightsquigarrow$ najdu netriviální LK $v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_2+\dots+v_n$

$$\dots + (a_{n-1}-a_n)(v_1+v_2+\dots+v_{n-1}) + a_n(v_1+v_2+\dots+v_n) =$$

A1 a) $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(\alpha(x,y,z)) = \alpha \cdot f(x,y,z)$

$f: (x,y,z) \longmapsto (x-y, x+z)$

LS: $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha x + \alpha z)$

$\parallel$

PS: $\alpha \cdot (x-y, x+z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha x + \alpha z)$

- f zachovává násobení prvkem z tělesa
- f zachovává součet

$f((x,y,z)+(x',y',z')) =$

$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$

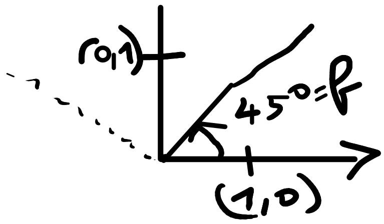
opět platí

Buďte V v.p. B_1 báze V (nad T)
W v.p. B_2 báze W
$f: V \longrightarrow W$ lineární zobrazení

${}_{B_2}[f]_{B_1}$:= matice jejíž sloupce jsou $[f(b_1)]_{B_2}, [f(b_2)]_{B_2}, \ldots$ $B_1 = (b_1, b_2, \ldots)$

$$[f(v)]_{B_2} = {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot [v]_{B_1}$$

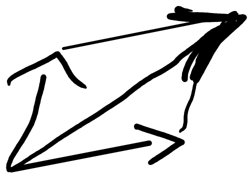
Př) $B_1 =$

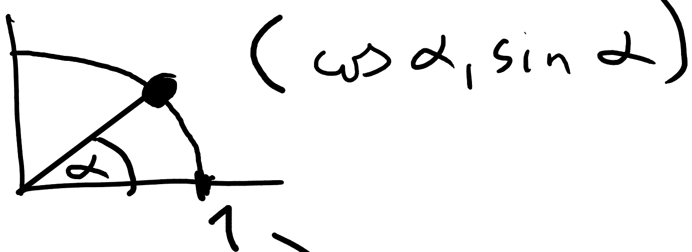


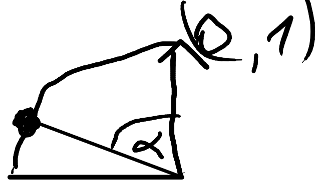
$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
f rotace o 45° proti směru hodinových ručiček

spočtěte ${}_{B_1}[f]_{B_1}$. Co otočení o 30°.

Ř) vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se zobrazí







$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ matice otočení

Př) Najdeme matici přechodu v $\mathbb{R}^3$ od báze

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ke

$$\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = B_2$$

$$_{B_2}[id]_{B_1}$$

Okamžitě vidíme

$$_{kan}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{kan}[id]_{B_2} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{C}[id]_{D} = {}_{D}[id]_{C}^{-1} \qquad (C, D, E \text{ báze})$$

$$_{C}[id]_{E}\; {}_{E}[id]_{D} = {}_{C}[id]_{D}$$

A✓ sin 2

$$_{B_2}[id]_{B_1} = {}_{B_2}[id]_{kan}\; {}_{kan}[id]_{B_1} =$$

$$= \left({}_{kan}[id]_{B_2} \right)^{-1} \cdot {}_{kan}[id]_{B_1}$$

Tedy $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -8 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

upravíme elem. ř. úpravami, a jakmile vlevo dostali $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, vpravo bude hledaná matice

(Neboť $C^{-1}(C|D) = (id|C^{-1}D)$)

$f: V \longrightarrow W$ lineární zobrazení

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = A$$

B_3 báze V Jak spočítat ${}_{B_4}[f]_{B_3}$?

B_4 báze W

$$f = id \circ f \circ id$$

$$\boxed{{}_{B_4}[f]_{B_3} = {}_{B_4}[id]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot {}_{B_1}[id]_{B_3}}$$

Př) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(A) $f: x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}}$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$

Najděte ${}_{B_2}[f]_{B_1}$

$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \underbrace{{}_{B_2}[id]_{kan}}_{{}_{kan}[id]^{-1}_{B_2}} \underline{{}_{kan}[f]_{kan}} \; \underline{{}_{kan}[id]_{B_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pr) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow$ reálné polynomy stupně ≤ 2

(B) B_1 báze $\mathbb{R}^3$ sestává z vektorů $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

B_2 báze onich polynomů

$(2x^2-2x,\ 3x-1,\ -x^2+x+3)$

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(vyjádřeno vůči kanonické bázi)

$$[f]_{B_1 B_1} [id]_{kan} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{kan}$$

Jaké jsou souřadnice $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ v bázi B_1?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \cdot (-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

souřadnice $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ v bázi B_1

(Má vyjít $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$)

$${}_{B_2}[\ell]_{B_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$2\cdot(2x^2-2x)+2(3x-1)+2(-x^2-x+3)=$$

$$=\underline{\underline{2x^2+4}}$$