Chci-li ověřit, že něco je vektorový prostor

1) Musím mít definované sčítání

a) Jak sečíst $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$?

Není definováno

×

b) pouze matice pevného rozměru, sčítat jdo

$q \cdot M$ ... také definováno

c) $\mathbb{R}$ je v.p. nad $\mathbb{Q}$

$r + s \in \mathbb{R}$ je definováno

$q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R}$ $q \cdot r$ je definováno a $\in \mathbb{R}$

d) $\{\sqrt{q} \mid q \in \mathbb{Q}\} = M$

~~...~~

... když v.p. $\exists$ aditivní inverz $-\sqrt{q} \in M$ ... což neplatí

e) $\{\sqrt{q} \mid q \in \mathbb{Q}\} \cup \{\sqrt{q} \mid q \in \mathbb{Q}\} = M$

$\sqrt{r} + \sqrt{s}$ je definováno a $\in \mathbb{R}$ ale málokdy $\sqrt{r} + \sqrt{s} \in M$

$\sqrt{2} + \sqrt{3} \in M$

$\Downarrow$

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$

$5 + 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ $\Downarrow$

není vektorový prostor

f) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall q, f(q) = 0\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \pi \\ \sqrt{2} & x = \pi \end{cases}$$

$(f+g)+h = f+(g+h)$

g) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q} \ f(q) = q\}$

když vezmu $f \in M$, $z \in \mathbb{Q}$

$g = z \cdot f$ .... $g(q) = z \cdot q \neq q \notin M$

$q \neq 1$

$z \neq 1$

$\Rightarrow g \notin M$

h) $Fce\{f : G \to \mathbb{Q}\} = M$

$f \in M$ $f' \in M$

$(f + f') \in M$ $(f + f')(g) = f(g) + f'(g)$

$z \in \mathbb{Q}$ $(z \cdot f)(g) := z \cdot f(g)$

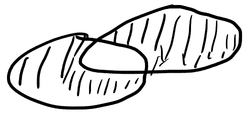
2) X množina, $\mathcal{P}(X)$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

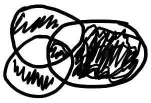
$\uparrow$ všechny podmnožiny

$A, B \subseteq X$ $\quad A + B := A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$

↳ je komutativní

? + tvoří Abelovu grupu? ....





$\exists\, 0 \quad A + 0 = A \quad \forall A$

$0 \text{ "="} \ \emptyset$

$\forall A\ \exists -A \quad A + (-A) = 0$; existuje $-A = A$

$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ asociativita ✓

<u>Dále</u>

$(A \triangle B) \triangle C = (A \cup B \setminus B \cap A) \triangle C =$

$= (A \cup B \setminus B \cap A) \cup C \setminus (A \cup B \setminus B \cap A) \cap C$

$=$

$(X \setminus Y) \cup C = (X \cup C) \setminus (Y \cap C)$

$(A \triangle B) \triangle C$

$(A \triangle (B \triangle C))$

Musíme definovat násobení $q \cdot A \quad q \in \mathbb{Z}_2$.

$0 \cdot A := \emptyset$

$1 \cdot A := A$

$\forall\ p, q \in \mathbb{Z}_2$

asociativita $(p \cdot q) \cdot A = p \cdot (q \cdot A)$ ...

distributivita např. $(1+1) A = 1 \cdot A + 1 \cdot A$

$\emptyset = 0 \cdot A = A \triangle A = \emptyset$

3) Spočtěme průnik nad $\mathbb{Z}_5$

$$X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v \in X \iff v = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

/Převedu na jednu stranu

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

$t \in \mathbb{Z}_5$

$x_4 = t$
$x_3 = 2t$
$x_2 = 3t$
$x_1 = 0$

~~$X = \langle (\ldots\ 0, 3, 2, 1) \rangle$~~

$t \in \mathbb{Z}_5$

$$v = -x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= -2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

t musí být $\neq 0$

netrpomenout $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Bonus $0 = 0$

Matice přechodu

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$[v]_B = (1,2,3,5)$$ souřadnice vůči bázi

$$\boxed{v = 1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 3v_3 + 5v_4}$$

$$B' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$$

$$[w]_{B'} = (1,2,2,3)$$

$$[v_1']_B = (0,1,1,0) \leftarrow$$
$$[v_2']_B = (1,2,2,0) \leftarrow$$
$$[v_3']_B = (0,0,0,1) \leftarrow$$
$$[v_4']_B = (0,1,0,1)$$

Jak zjistit $[w]_B$?

$$w = 1\cdot v_1' + 2\cdot v_2' + 2\cdot v_3' + 3\cdot v_4' =$$
$$= 1\cdot(v_2+v_3) + 2\cdot(v_1+2v_2+2v_3) + 2\cdot v_4 + 3(v_2+v_4)$$

$$[w]_B = (2,8,5,5)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matice přechodu}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\\5\\5\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ regulární

$$A\,[v]_{B'} = [v]_{B}$$

Maticové prostory

1) Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5, \cancel{\mathbb{Z}_7}$

rozhodněte, zda platí $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in S(A)$ ← sloupcový prostor

3) Najděte báze $R(A)$, $S(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ (řádkový prostor)

pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

jádro matice
všechny vektory v
$A\cdot v = 0$ ... řešení rovnice A

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim R(A) = 2$
$\dim S(A) = 2$

Báze $R(A)$ ... nenulové řádky v (R)REF
$(1, 0, 1, 3/2)$; $(0, 1, 1, -1/2)$

Báze $S(A)$ .... vektory na pivotních sloupcích v původní matici

---

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

nad $\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \dots \end{pmatrix} \neq 0$

nad $\mathbb{Z}_5$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ nad $\mathbb{Z}_5$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S(A)$ .... řešíme, jestli rovnice $\left(A \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ má řešení

nad $\mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right)$ řešitelné $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S(A)$

nad $\mathbb{Z}_5$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ neřešitelné
nad $\mathbb{Z}_5$ nepatří

$\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ...= řešení soustavy $Ax = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & [illegible] \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$u \quad t$

Báze jádra $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, jádro $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim \mathrm{Ker} = 2$