1 Řešení lineárních rovnic rovnic

1. Vyřešte následující soustavu rovnic nad reálnými čísly:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 9 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Rovnici si nejprve napíšeme v maticovém tvaru (tj. vynecháme názvy proměnných, a místo rovná se napíšeme jen svislou čáru). První sloupec tak bude odpovídat proměnné x_1, druhý x_2, atd.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 11 & -4 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

Nyní pomocí elementárních řádkových úprav odstraníme x_1 ze všech rovnic, až na první. (r_i značí i-tý řádek) Poté odstraníme x_2 ze všech rovnic, až na první a druhou, a tak dál. Tomuto postupu se říká *Gaussova eliminace*.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 11 & -4 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-2r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 8 & 9 \\ 0 & 9 & -2 & 4 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4-3r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Nyní jsme systém rovnic převedli do pěkného tvaru a můžeme ho vyřešit tzv. *zpětnou substitucí*, tedy následujícím postupem: Poslední rovnice říká, že $2x_4 = 6$, neboli $x_4 = 3$. Dosazením do třetí rovnice zjistíme, že $-x_3 + 4x_4 = 11$, a jelikož $x_4 = 3$, dostáváme $-x_3 + 12 = 11$, tedy $x_3 = 1$. Dosazením do druhé rovnice získáváme $3x_2 - 1 + 2 \cdot 3 = -1$, neboli $x_2 = -2$. Následným dosazením do první rovnice získáme $x_1 = 1$.

Pro zjednodušení zápisu budeme toto řešení psát jako $(1, -2, 1, 3)$.

Další řešené příklady na Gaussovu eliminaci byly následující (rovnou v maticovém zápisu):

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & -7 \\ 2 & 8 & 6 & -4 \end{array}\right)$ (b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -4 & 0 \\ 2 & 11 & 5 & 9 \\ 4 & 18 & 3 & 11 \end{array}\right)$ (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 4 & 7 & 19 \\ 0 & 5 & 2 & 6 & 5 \end{array}\right)$

Řešení: (a) $(4, -3, 2)$ (b) $(2, 0, 1)$ (c) $(7, -2, 1)$ (d) $(5, -1, 2, 1)$

2. Letecká společnost chce koupit přesně 12 letadel na vyhlídkové lety a požaduje, aby celková kapacita byla přesně 220 lidí. Dostupné typy vyhlídkových letadel mají kapacitu 10, 15 a 20 lidí. Kolik kterého typu letadel má společnost koupit, aby splnila podmínky? Najděte všechna řešení.

   Toto si zapíšeme jako systém rovnic, kde první proměnná značí počet letadel s kapacitou 10, druhá proměnná počet letadel o kapacitě 15 a třetí proměnná počet letadel o kapacitě 20. Pro úsporu místa použijeme maticového zápisu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 10 & 15 & 20 & 220 \end{array}\right)$$

   Gaussovou eliminací[1] tento system upravíme na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{array}\right)$$

   Z této rovnice ovšem nemůžeme určit poslední proměnnou x_3. Nicméně pokud bychom její hodnotu znali, hodnoty zbylých proměnných by již šly spočítat: $x_2 = 20-2x_3$ a $x_1 = 12-x_2-x_3 = 12-(20-2x_3)-x_3 = -8+x_3$. Pro každou hodnotu x_3, kterou si zvolíme dostaneme tedy jiné řešení dané rovnice.

   Nyní si ale musíme uvědomit, že ona rovnice odpovídá počáteční úloze, ve které x_1, x_2, x_3 mohou být pouze celá nezáporná čísla. Tedy $x_1 = -8+x_3$ tedy vynutí $x_3 \leq 8$ a $x_2 = 20 - 2x_3 \geq 0$ vynutí $x_3 \leq 10$. Jelikož x_3 musí být celé, máme jen tři možnosti $x_3 = 8, 9, 10$. Řešením tedy jsou $(0, 4, 8)$, $(1, 2, 9)$ a $(2, 0, 10)$.

3. Nechť a, b, c jsou komplexní čísla. Najděte všechna řešení následujícího systému rovnic $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \end{array}\right)$

Jedná se o systém rovnic s parametry, řešení a postup tedy může záviset na hodnotách a, b, c a může se stát, že v průběhu řešení budeme muset rozlišit několik možností dle toho, zda $a = 0$, $a = 1$, apod.

Jelikož nevíme, zda je $a = 0$, prvně prohodíme první dva řádky. Na první místo první řádky tak dostaneme číslo, které je zcela jistě nenulové.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \end{array}\right)$$

Nyní odečteme a-násobek prvního řádku od druhého, a první řádek od třetího:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1-ba & 1-a & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \end{array}\right)$$

[1] V tomto případě přičtením (-10)-ti násobku prvního řádku k druhému a následně vydělením druhého řádku 5

Nyní prohodíme druhý a třetí řádek (druhý řádek není tak složitý, snad se nám s ním bude lépe pracovat.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \\ 0 & 1-ba & 1-a & 0 \end{array}\right) \tag{1}$$

Pokud nyní $b \neq 1$, tak můžeme poslední řádek přenásobit $(1-b)$ a následně od něj odečíst $1-ba$ násobek řádku druhého.

$$\left(\begin{array}{lll|l} 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(1-b)-(1-ba)(c-1) & 0 \end{array}\right)$$

Poslední matice se ovšem rovná

$$\left(\begin{array}{lll|l} 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-b-c+abc & 0 \end{array}\right)$$

Pokud je tedy $2-a-b-c+abc \neq 0$, jediné řešení je $(0,0,0)$. V opačném případě můžeme za x_3 zvolit libovolné reálné číslo. Poté $x_2 = \frac{-x_3(c-1)}{b-1}$ a $x_1 = -x_3 - bx_2 = -x_3 - \frac{c-1}{b-1}bx_3$, tedy řešení jsou $(-t-\frac{c-1}{b-1}bt, -\frac{c-1}{b-1}t, t)$, kde t probíhá všechna reálná/komplexní[2] čísla.

Zbývá rozřešit případ $b = 1$. Pak se ovšem (1) redukuje na

$$\left(\begin{array}{lll|l} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

a prohozením druhého a třetího řádku dostaneme

$$\left(\begin{array}{lll|l} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 \end{array}\right)$$

Pokud nyní $c \neq 1$, tak $x_3 = 0$. Pokud $c = 1$, tak x_3 může být libovolné. Pokud $a \neq 1$ tak $x_2 = -x_3$ a $x_1 = 0$. Pokud i $a = 1$, tak x_2 může být libovolné, a $x_1 = -x_2 - x_3$.

Pro větší přehlednost bychom ještě mohli výsledky zapsat do tabulky.

parametry	řešení
$b \neq 1$, $2-a-b-c+abc \neq 0$	$(0,0,0)$
$b \neq 1$, $2-a-b-c+abc = 0$	$(-t-\frac{c-1}{b-1}bt, -\frac{c-1}{b-1}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$
$b = 1$, $c \neq 1$, $a \neq 1$	$(0,0,0)$
$b = 1$, $c \neq 1$, $a = 1$	$(-t,t,0)$, $t \in \mathbb{R}$
$b = 1$, $c = 1$, $a \neq 1$	$(0,-t,t)$, $t \in \mathbb{R}$
$b = 1$, $c = 1$, $a = 1$	$(-u-v,u,v)$, $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$

[2] Dle toho, v jakém oboru rovnici řešíme.