Dvanáctá série domácích úkolů z lineární algebry

Deadline: 15.1.2021, 23:59:59.99

Zadání

1. [4b] Dokažte, že větu o dimenzi spojení a průniku NELZE zobecnit na tři podprostory. Tj. ukažte, že i když známe $\dim U_1, \dim U_2, \dim U_3$, $\dim(U_1+U_2), \dim(U_1+U_3), \dim(U_2+U_3)$, $\dim(U_1\cap U_2), \dim(U_1\cap U_3), \dim(U_2\cap U_3)$, $\dim(U_1\cap U_2\cap U_3)$, tak není možné určit $\dim(U_1+U_2+U_3)$.

   Připomenutí věty o dimenzi spojení a průniku: Jsou-li U and V vektorové podprostory W, pak platí $\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U\cap V)$.

2. [2b] Vyřešte následující soustavu rovnic v $\mathbb{R}$ a výsledek uveďte ve tvaru afinního podprostoru, tj. jako $\mathbf{v} + \operatorname{span}(U)$, kde $\mathbf{v}$ je nějaký vektor a U je množina lineárně nezávislých vektorů.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 &= 4. \end{aligned}$$

3. [3b] Najděte soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$, jejímž řešení se rovná $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\-10\end{pmatrix}\right)$.

4. [bonus+2b] Dokažte, že všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, které pro všechna $x\in\mathbb{R}$ splňují

$$f(x) + 2f'(x) + 12f''(x) + \frac{3}{5}f'''(x) = 0$$

   tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "lingebra". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se ale, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Řešení můžete zaslat i několikrát, počítat se bude nejlepší dosažený počet bodů.

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit a uvést celý postup.[1]

[1] Na takové úrovni detailů, aby z řešení bylo jasné, že látku chápete.