Jedenáctá série domácích úkolů z lineární algebry

Deadline: 8.1.2021, 23:59:59.99

Zadání

1. [2b] Rozhodněte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x,y) = (2x+y, x-2y)$ lineární. Pokud ano, napište jeho matici vůči kanonické bázi.

2. [2b] Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, B_U a B_V dvě jeho báze. Máme zadány matice $X = {}_{B_V}[id]_{B_U}$, $Y = {}_{B_U}[f]_{B_U}$, kde $f\colon U \to U$ je lineární zobrazení. Vyjádřete matice

   (a) ${}_{B_V}[f]_{B_V}$,

   (b) ${}_{B_U}[f]_{B_V}$,

   (c) ${}_{B_U}[id]_{B_U}$

   pomocí uvedených matic (a případně jednotkové matice).

3. [4b] Uvažme vektorové prostory U, V, W nad $\mathbb{R}$ a lineární zobrazení $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$. Dále máme zadány následující báze oněch prostorů: $B_U := \{-x^2+3, 2x^2-2x+2, x-3\}$, $B_V := \{(-2,1,3)^T, (1,-2,1)^T, (1,0,-1)^T\}$ a víme, že

$$ {}_{B_W}[g]_{B_V} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, $$

$$ {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. $$

   (a) Určete bázi a dimenzi $\ker(g \circ f)$.

   (b) Určete bázi a dimenzi $\operatorname{Im}(g \circ f)$

   (c) Rozhodněte, zda je zobrazení $g \circ f$ prosté.

   (d) Rozhodněte, zda je zobrazení $g \circ f$ na.

4. [3b] Nalezněte izomorfismus a k němu inverzní zobrazení mezi $U := \operatorname{span}\{(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T\}$ a $V := \operatorname{span}\{(3,2,1,0)^T, (1,1,1,1)^T\}$.

5. [bonus+3b] Nechť n je přirozené číslo a P vektorový prostor reálných polynomů stupně $\leq n$ nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že derivace $p \mapsto p'$ je lineární zobrazení a napište matici tohoto zobrazení vůči bázi $B = (1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "lingebra". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se ale, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Řešení můžete zaslat i několikrát, počítat se bude nejlepší dosažený počet bodů.

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit a uvést celý postup.[1]

[1] Na takové úrovni detailů, aby z řešení bylo jasné, že látku chápete.