

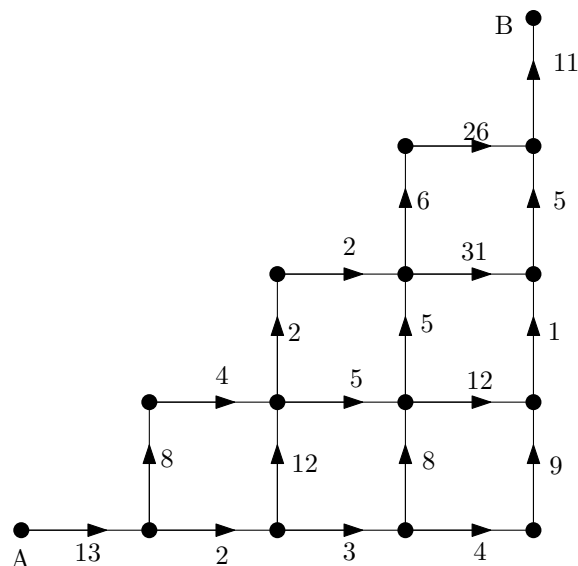
Osmá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 4. 12. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

Uvažme následující (orientovaný) graf, kde každé hraně je přiřazené nějaké číslo.



- [2b] Spočítejte počet orientovaných cest z bodu A do bodu B.
- [2b] Pokud ona čísla určují délku hrany, najděte nejkratší cestu z A do B (a dokažte, že je nejkratší).
- [2b] Pokud ona čísla určují maximální šířku vozidla, určete, jak široký náklad můžeme přepravit z bodu A do B. Vyznačte též nějakou cestou, po které lze takový náklad přepravit.
- [bonus+2] Uvažme nyní ten samý graf, kde ale zapomeneme na orientaci hran. Ona čísla nyní určují cenu za stavbu silnice mezi koncovými body/městy (v milionech euro). Chceme nyní postavit silnice tak, aby se dalo dostat z každého města do každého. Jaké jsou minimální náklady, za jakých se nám to podaří? Jaké silnice v tom případě postavíme?
- [3body] Buď $G = (V, E)$ konečný (orientovaný) multigraf, kde každá hrana má přiřazenou nějakou délku. Buď A matice $V \times V$, kde na pozici a_{uv} je délka nejkratší hrany z vrcholu u do v a $+\infty$, pokud žádná hrana z u do v nevede. Dále se dohodneme, že $a_{vv} = 0$ pro každý vrchol $v \in V(G)$.

Definujme nyní “divné násobení” matic,¹ ve kterém postupujeme jako v normálním násobení matic, jen všechny součiny čísel nahradíme součty a všechny sumy maximem. Označme toto nové násobení matic třeba \otimes . Matice $D = B \otimes C$ tak bude splňovat $d_{ij} = \max\{b_{ik} + c_{kj} \mid k = 1, 2, \dots\}$ (pokud bude definována). Co při této definici násobení značí hodnota prvku x_{uv} v matici $X = \underbrace{A \otimes A \otimes A \cdots \otimes A}_{k\text{-times}}$?

¹ Odborně se takovému násobení říká *tropické*, protože místo v tělese $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ probíhá v tzv. *tropickém polookruhu* $(\mathbb{R}, \max, +)$.

Pokyny

Řešení pošlete na ppatak@seznam.cz s předmětem “diskretka”. Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítávají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.