Sedmá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 27. 11. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. [3b] Dokažte, že posloupnost $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ nezáporných celých čísel je skóre stromu právě tehdy, když $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$´
2. [4b] Cílem tohoto cvičení je pochopit, jak rychle dovedete vstřebat nové pojmy.

   Vzdálenost $\mathrm{dist}_G(x, y)$ dvou vrcholů x, y grafu G je definována jako délka nejkratší cesty z x do y. Pokud žádná taková neexistuje, je vzdálenost definována jako $+\infty$. Excentricita vrcholu x je $\mathrm{ecc}_G(x) = \max_{v \in V(G)}\{\mathrm{dist}_G(x, v)\}$. Poloměr $\mathrm{diam}_G(G)$ grafu G je definován jako $\max_{v \in V(G)}\{\mathrm{ecc}_G(v)\}$ a průměr $r(G)$ jako $\min_{v \in V(G)}\{\mathrm{ecc}_G(v)\}$.

   Centrum grafu je množina všech vrcholů v, pro které platí $r(G) = \mathrm{ecc}_G(v)$. Periferie grafu je množina všech vrcholů v, pro které platí $\mathrm{diam}(G) = \mathrm{ecc}_G(v)$.

   Nakreslete svůj oblíbený souvislý graf se skórem $(4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$ a určete jeho průměr a poloměr a vyznačte jeho centrum a periferii.
3. [3b] Spočtěte počet automorfismů následujících grafů: C_5, P_5, Petersonův graf. (Automorfismus je bijektivní zobrazení $V(G)$ na $V(G)$, které hrany zobrazuje na hrany a nehrany na nehrany.)
4. [Bonus+2] V turnaji n hráčů hrál každý s každým právě jednou. Hamiltonovská cesta je takové uspořádání n hráčů, že první porazil druhého, druhý třetího, ... Dokažte, že turnaj mohl dopadnout tak, že existovalo alespoň $n!/2^{n-1}$. hamiltonovských cest.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "diskretka". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.