Šestá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 20. 11. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. (3b) Rozhodněte, zda existují grafy s následujícími posloupnosti stupňů:
   (a) 4, 3, 3, 2, 2, 2, 0
   (b) 5, 4, 3, 2, 2, 1, 0
   (c) 6, 4, 3, 2, 2, 1, 0
2. (3b) Buď X množina $\{1, 4, 7\}$. Sestrojíme graf $G = (V, E)$ graf, kde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a $E = \{\{i, j\} : |j - i| \in X\}$. Nakreslete tento graf a spočtěte jeho skóre (posloupnost stupňů vrcholů).[1]
3. (2b) Buď n libovolné přirozené číslo. Najděte všechna čísla k, pro která existuje strom s přesně k vrcholy stupně jedna.
4. (2b) Dokažte, že v každém konečném grafu existují dva vrcholy se stejným stupněm.
5. (bonus+3b) Dokažte, že pokud $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ je posloupnost všech stupňů nějakého grafu, tak
   - $\sum_{k=0}^{n} d_i$ je sudé
   - pro každé $k = 1, \ldots, n$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$$

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "diskretka". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.

[1] Pro zajímavost: jedná se o příklad tzv. Paleyho grafu, které mají řadu zajímavých vlastností, např. jsou izomorfní svému doplňku. Paleyho grafy se využívají např. v teorii čísel nebo Ramseyho teorii.