

Druhá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 6. 11. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

Částečná uspořádání

- (2body) Nechť (P, \leq) je konečná částečně uspořádaná množina. Poté $\omega(P)$ značí největší velikost řetězce obsaženého v P a $\alpha(P)$ největší velikost antiřetězce obsaženého v P .
Vaším úkolem je dokázat, že v P lze najít $\omega(P)$ navzájem disjunktních antiřetězců $A_1, A_2, \dots, A_{\omega(P)}$ takových, že $P = \bigcup_{i=1}^{\omega(P)} A_i$.
- (2body) Dokažte, že pokud má konečná částečně uspořádaná množina jediný maximální prvek, tak tento prvek je nejmenší. Dále ukažte, že pro nekonečné množiny toto neplatí.

Kombinatorické počítání

- (3body) Pro každé n určete počet dvojic množin (A, B) , které splňují $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ a počet čtveřic množin (E, F, G, H) , které splňují $E \subseteq F \subseteq H \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a zároveň $E \subseteq G \subseteq H$.
- (2body) Spočítejte

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

- (bonus+2) Z důvodu velkého sucha klesla hladina rybníka a nad hladinou se objevil pozůstatek staré zídky – řada n kamenů s mezerami, po kterých je možné přeskákat z jednoho břehu na druhý, alespoň jste-li žába. Kameny jsou však malé, a tak se na každý vejde jen jedna žába. Navíc se není na kameny možnost otočit, takže není cesty zpět. Navíc ony kameny jsou daleko, takže je možné skočit jen na následující volný kamen. Na břehu žijí dvě žáby, a chtějí se dostat na druhou stranu. Kolika způsoby to mohou udělat? Počítejte s tím, že v žádný okamžik neskočí obě žáby najednou. Pohyb na břehu nepočítáme.

Možnosti: např. nejprve první žába přeskáče vše, pak druhá vše. Nebo první žába skočí a druhá jí následuje o kamen pozadu, či mezi sebou nechají díru o nějaké velikosti, apod. (Mimo bodování: Co kdyby žab bylo vícero, třeba k ? Umíte spočítat výsledek pro $n = 350$ a $k = 200$? Můžete využít i počítač.)

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem “diskretka”. Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z L^AT_EXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítávají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.