Druhá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 30. 10. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. (3body) Buď D množina všech dělitelů čísla 60, které jsou větší než 1, spolu s uspořádáním dělitelností. Nakreslete Hasseův diagram tohoto uspořádání a vyznačte v něm největší, nejmenší prvek, minimální a maximální prvky, pokud existují.

2. (3body) Buď $(P, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Rozhodněte, které z následujícíh relací jsou částečná uspořádání:

   (a) $\{(a, b) \mid a \in P, b \in P, b \leq a\}$

   (b) $\{\big((a, b), (c, d)\big) \mid (a, b) \in P^2, (c, d) \in P^2, a \leq c \wedge b \leq d\}$

   (c) Uvažme nyní množinu všech funkcí z $\mathbb{N}$ do P, a definujme $f \leq g$, pokud buď $f = g$, nebo pokud pro první přirozené číslo x, kde se $f(x) \neq g(x)$, platí $f(x) \leq g(x)$.

3. (1bod) Najděte částečně uspořádanou množinu P, která má největší a nejmenší prvek, a podmnožinu $X \subseteq P$, která nemá v P supremum $\sup X$.

4. (1bod) Buď $(P, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Dokažte, že pokud má každá podmnožina $X \subseteq P$ supremum, tak P má nejmenší prvek.

5. (1bod) Buď $(P, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Platí pro každou podmnožinu $X \subseteq P$, že $\inf X \leq \sup X$? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, najděte všechny protipříklady.

6. (bonus+2) Buď $(P, \leq)$ částečně uspořádaná množina. Dokažte, že následující dvě podmínky na P jsou ekvivalentní:

   (a) Každá podmnožina $X \subseteq P$ má supremum,

   (b) Každá podmnožina $X \subseteq P$ má infimum.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "diskretka". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.