Druhá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 23. 10. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. (2 body) Nalezněte binární relaci R na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická.

2. (3 body) Buď b_n, $n \in \mathbb{N}$ posloupnost zadaná rekurentně pomocí $b_0 = 1$, $b_1 = 3$ a
$$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2} \qquad \text{pro } n \geq 2$$
Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí $b_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$.

3. (2 body) Rozhodněte, zda je relace $\geq$ na přirozených číslech:
(a) reflexivní (b) symetrická (c) antisymetrická (d) tranzitivní

4. (3 body) Nechť $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Kolik na M existuje binárních relací? Kolik z nich splňuje, že jsou
(a) reflexivní? (b) symetrické?
(c) tranzitivní, symetrické a reflexivní zároveň?

5. (Bonus +2 body) Dokažte, že každý zlomek $\frac{p}{q}$ z interval $(0, 1]$ lze zapsat jako
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_l},$$
kde l je vhodné přirozené číslo, a k_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ jsou různá přirozená čísla.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "diskretka". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů.