Čtrnáctá série domácích úkolů z diskrétní matematiky (závěrečná všehochuť)

Deadline: 29. 1. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. [2b] Jaká je pravděpodobnost, že náhodný graf na dané n-prvkové množině V neobsahuje vrchol stupně 0? (Předpokláme, že každý z $2^{\binom{n}{2}}$ grafů má stejnou pravděpodobnost býti vybrán.)
2. [3b] Dokažte, že dva grafy G a H jsou izomorfní právě tehdy, pokud existuje permutační matice[1] P taková, že $A_H = PA_GP^T$, kde A_G značí matici sousednosti pro graf G, a podobně A_H pro graf H.
3. [1b] Nechť G je graf. Víme, že pokud ho chceme obarvit tak, aby sousední vrcholy neměly stejnou barvu, potřebujeme alespoň k barve. Dokažte, že G má alespoň $\binom{k}{2}$ hran.
4. [bonus+5] Buďte $(P, \leq_P)$ a $(Q, \leq_Q)$ částečně uspořádané množiny a $f\colon P \to Q$ a $g\colon Q \to P$ dvě zobrazení taková, že pro všechna $p \in P$ a $q \in Q$ platí

$$f(p) \leq_Q q \Leftrightarrow p \leq_P g(Q).$$

   Dokažte, že f i g jsou monotonní, tj. splňují $p_1 \leq p_2 \Rightarrow f(p_1) \leq f(p_2)$.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem “diskretka”. Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.

[1] Matice je permutační, pokud je čtvercová a v každém řádku i sloupci má právě jednu jedničku a všechny ostatní čísla jsou nuly.