Třináctá série domácích úkolů
z diskrétní matematiky

Deadline: 22. 1. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. [4b] Náhodně vybereme kladné celé číslo N, přičemž pravděpodobnost toho, že vybereme i je 2^{-i}. Pak hodíme N kostkami. Označme S součet čísel, která padla. Určete podmíněné pravděpodobnosti $P[N = 2|S = 5]$ a $P[S = 4|N \text{ je liché}]$.

2. [2b] Když vypravěč vypráví nějaký příběh, je 40% šance, že si vymýšlí. To děti poznají v 70% případů. Na druhou stranu, i když si nevymýšlí, tak mu zase v 20% případů nevěří.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že následující zážitek budou děti vypravěči věřit?

   (b) Pokud děti vypravěčovi uvěřili, jaká je pravděpodobnost, že si nevymýšlel?

   (Poznámka: Rozhodli jsme se pro klidné zadání této úlohy. Pro aktuálnější verzi zaměňte slovo vypravěč za virus a slovo děti za test, atd.)

3. [4b] Mějme graf G s n vrcholy. Uvažme následující náhodný proces. Prvně náhodně uspořádáme vrcholy G (tak, že každé uspořádní má pravděpodobnost $1/n!$). Poté dle zvoleného uspořádání probíráme vrcholy G a když na nějaký narazíme, zahodíme všechny jeho sousedy; tak pokračujeme, dokud nám zbývají nějaké nenavštívené vrcholy. Spočtěte střední hodnotu počtu nevyhozených vrcholů a na základě tohoto výpočtu dokažte, že G má nezávislou množinu[1] velikosti alespoň

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg v + 1}.$$

4. [bonus+2] Nechť n je prvočíslo. Dále je $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ množina všech elementárních jevů, kde každý nastane s pravděpodobností $1/n$. Nalezněte všechny dvojice nezávislých jevů.

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem “diskretka”. Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.

[1] Množina vrcholů je nezávislá tehdy, když neobsahuje žádné hrany.