

Dvanáctá série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Deadline: 15. 1. 2020; 23:59:59.99

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. [3b] Bud' p reálné číslo z intervalu $[0, 1]$. Graf $G(n, p)$ je náhodný graf, který má n vrcholů a každou hranu e do něj umístíme náhodně a nezávisle na ostatních s pravděpodobností p . Spočtete střední hodnoty počtu hran a počtu trojúhelníků obsažených v $G(n, p)$.
2. [4b] Necht' n je přirozené číslo. Vybereme náhodnou permutaci $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. (Každá permutace má stejnou pravděpodobnost $1/n!$). Náhodná veličina X je počet pevných bodů π , tj. počet takových $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro která platí $\pi(i) = i$. Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$.
3. [3b] Najděte příklad tří jevů, které jsou po dvou nezávislé (tj. každá dvojice jevů je nezávislá), ale nejsou nezávislé.
4. [bonus+3] Dokažte, že pro $n < 2^{k/2}$ máme nenulovou pravděpodobnost, že graf $G(n, \frac{1}{2})$ neobsahuje nezávislou množinu¹ velikosti k ani úplný podgraf velikosti k .

Pokyny

Řešení pošlete na ppatak@seznam.cz s předmětem "diskretka". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z L^AT_EXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítávají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů. Příklady můžete zaslat i opakovaně, počítá se nejlepší dosažení počet bodů.

¹ Tj. podmnožinu vrcholů, která neobsahuje ani jednu hranu.