První série domácích úkolů z diskrétní matematiky

Pokyny

Řešení posílejte na ppatak@seznam.cz s předmětem "diskretka". Řešení mohou být v jakémkoli formátu (v ideálním případě pdf z LaTeXu, ale stačí i naskenované, nafocené pdf, jpeg), snažte se ale, aby byla řešení čitelná. U bonusových příkladů se Vám body započítavají, ale body z bonusového příkladu se nepočítají do celkového maximálního počtu bodů.

U každého příkladu nezapomeňte svá řešení pořádně zdůvodnit.

Zadání

1. (2body) Buď b libovolné číslo a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte vzorec pro součet geometrické řady
$$\sum_{i=0}^{k} b^i = \begin{cases} \frac{b^{k+1}-1}{b-1} & \text{pro } b \neq 1, \\ k+1 & \text{pro } b = 1. \end{cases}$$

2. (2body) Dokažte, že pro všechna kladná celá čísla n platí $2^n \geq 2n$.

3. (2body) Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x \in [-1, +\infty)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

4. (bonus+2) Nechť x je reálné číslo takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ je celé.

5. (1bod) Rozhodněte, zda pro každé tři množiny A, B, C splňující $A \subseteq B$ platí
$$(C \cap B) \cup A = (C \cup A) \cap B.$$