Cvičení diskrétní matematika

Stromy, kostry

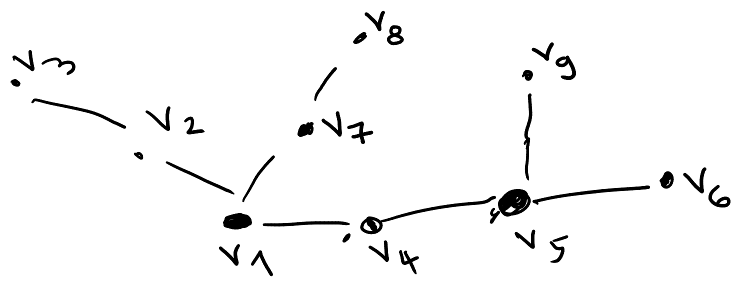
Rovinné grafy

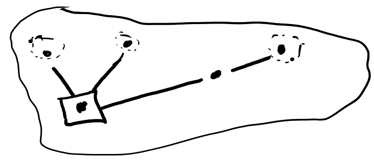
Různé definice stromu

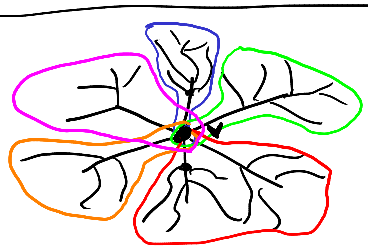
- 1) souvislý les
- 2) les s n vrcholy a $n-1$ hranami
- 3) souvislý graf s n vrcholy a $n-1$ hranami
- 4) maximální les (tj. přidání hrany vytvoří kružnici)
- 5) minimální souvislý graf (tj. odebrání hrany zruší souvislost)
- 6) G takový, že $\forall u,v \in V(G)$, $u \neq v$ existuje právě jedna cesta z u do v.

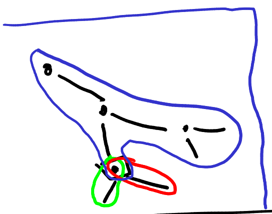
? Které z těchto definic dávají smysl i pro nekonečné grafy? 2 a 3 ne

2) by fungovala v podobě $\exists$ vrchol v a bijekce f z $V(G)\setminus v$ do $E(G)$ t.ž. $\forall u \in V(G)\setminus v$ $u \in f(u)$









$\forall$ barevný strom má 2 ~~vrcholy~~ vrcholy $\Rightarrow$ má ≥ 2 listy (dle věty o existenci listu)

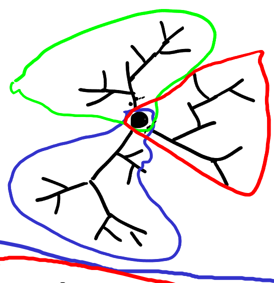
maximálně jeden z těchto listů je onen prostřední vrchol v

$\Rightarrow$ celkový počet listů je $\geq$ #barevných stromů $\cdot (2-1)$ $\geq$ #barevných stromů $= \deg v$

$v = 0$ platí $\cdot\cdot\cdot\cdot$ •—• 2 listy, 0 vnitřních bodů

$v > 0$ vyberu vnitřní vrchol (stupně 3)

T_1, T_2, T_3



modrý strom dle indukce $\ell = v+2$

červený $\ell = v+2$

zelený $\ell = v+2$

$\ell = \ell + \ell + \ell - 3$

$v = v + v + v + 1$

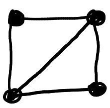
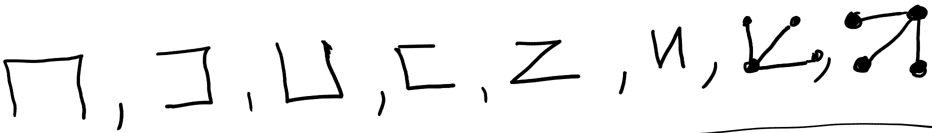
$\ell = \ell + \ell + \ell - 3 =$

$= v+2+v+2+v+2-3$

$= v+2$

Kostra (spanning tree)

G je souvislý graf; kostra G je strom $T \subseteq G$; $V(T)=V(G)$

 kostry: 

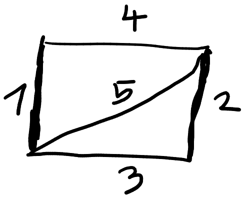
• G graf (souvislý)

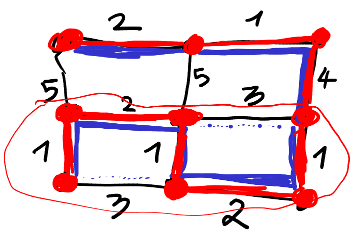
- a) Najít kostru
- b) Najít minimální kostru
- c) Spočítat všechny kostry G
- d) najít neizomorfní kostry

(hrany G mají ceny my chceme najít kostru, co cenu minimalizuje)

Jak řešit a)? • Najít kružnici, odebrat hranu ové kružnice opakovat, dokud budou v G kružnice

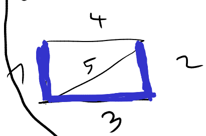
• obráceně, lze začít s prázdným grafem a ~~hrany~~ přidávat hrany z G dokud jich není n-1 ↳ tak, aby se nevytvořil kružnici

b) 

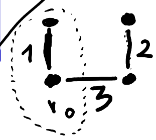


• Může modifikovat algoritmus na a

Přidávám postupně do kostry hrany s nejmenší „cenou" (aniž tvořím kružnice)

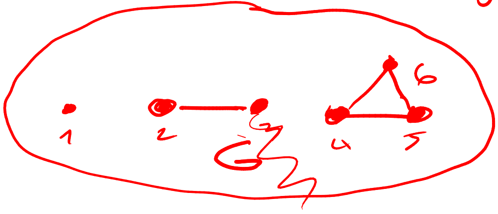


• Kruskalův algoritmus



Začnu s v_0 a vždy přidám hranu nejnižší váhy, co my spojuje zatím vytvořený strom se zbytkem grafu (Jarníkův Prim's algoritmus)

G graf komponenta souvislosti je maximální souvislý podgraf G (jakýkoliv / inkluzí)

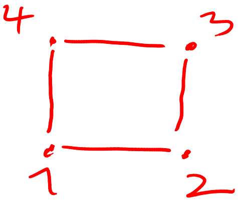


jeho komponenty souvislosti jsou

G graf $\varphi : V(G) \to V(G)$

$e=\{x,y\}\in E(G)$ $\{f(x),f(y)\}\in E(G)$

$\{x,y\}\notin E(G) \Rightarrow \{f(x),f(y)\}\notin E(G)$

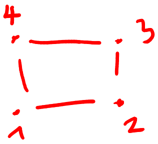


$f:$ $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$

bijekce

$12 \to 24$, $12 \in E(G)$, $24 \notin E(G)$ není automorfismus

---



$f:$ $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, $4 \to 4$

$12 \to 23$ ✓ (1,3)

$23 \to 31$ ×

$f:$ $1 \to 1$, $2 \to 4$, $3 \to 3$, $4 \to 2$

$12 \to 14$ ∈ ✓

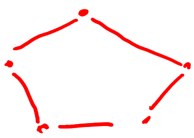
$23 \to 34$ ✓

$34 \to 23$ ✓

$14 \to 12$ ✓

automorfismus je

C_n cyklus na n vrcholech



P_n cesta délky n na n vrcholech