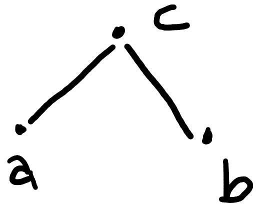
! Neplést si množiny a jejich prvky.

$P = \{a, b, c\}$



Jaké jsou podmnožiny P?

$\overset{a}{\#}$ $\overset{b}{\#}$ $\overset{c}{\#}$

$\{\} = \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

$\sup \{a, b\}$ .... množina horních mezí $= \{c\}$

podmnožina P

... nejmenší prvek $\{c\}$ je c.

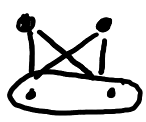
$\sup \emptyset$ .... množina horních mezí? $\{a,b,c\}$

nejmenší prvek? nemá

$\sup \emptyset$ neexistuje

$X = \mathbb{R}$

$[0, +\infty)$



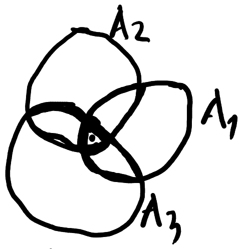
$(\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$

... ~~množina supremum~~

PIE

- A_1, A_2, A_3 množiny

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



$+1+1+1$
$-1-1-1$
$+1$

- $\cancel{\cup A}$. $$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^{|I|} (-1)^{k-1} \sum_{J \in \binom{I}{k}} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

I konečná množina

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{|I|} (-1)^{k+1} \sum_{J \in \binom{I}{k}} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

A_1 .... 1. řádek je plný
A_2 .... 2. řádek plný
A_3 .... 3. řádek ″
A_4 .... 4. řádek ″

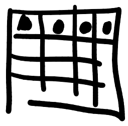
A_5 .... 1. sloupec plný
A_6 .... 2. sloupec ″
A_7 .... 3 ″
A_8 .... 4 ″

---

1 zaplněný sloupec a 1 zaplněný řádek

$$\left|\bigcup_{i=1}^{8} A_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{8} |A_i|\right) - \underbrace{2\cdot\binom{4}{2}\cdot 1}_{\text{2 zaplněné řádky / 2 zaplněné sloupce}} - 4\cdot 4\cdot 9 = 8\cdot\binom{12}{4} - 2\cdot\binom{4}{2} - 16\cdot 9$$

$$|A_i| = \binom{12}{4} = 495$$



} 12 volných polí na 4 kameny $\Rightarrow \binom{12}{4}$

$1 = |A_1 \cap A_2|$

$1 = |A_i \cap A_j|$ $\quad 1 \le i < j \le 4$

$-|A_1 \cap A_2|$
$-|A_1 \cap A_3|$
$-|\ldots|$

$\bigcup A_i$ .... hledané možnosti

$|\bigcup A_i|$ ... PIE

Spočteme kolik je prvočísel mezi $1, \ldots, 100$

A_2 ... čísla dělitelná 2
A_3 ... čísla dělitelná 3
A_5 ... ″ 5
A_7 ... ″ 7

$A_2 \cap A_3$ ... dělitelná 6

$|A_2| = \frac{100}{2} = 50$
$|A_3| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$
$|A_5| = 20$
$|A_7| = \lfloor \frac{100}{7} \rfloor = 14$

$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$
$|A_2 \cap A_5| = \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 10$
$|A_2 \cap A_7| = \lfloor \frac{100}{14} \rfloor = 7$
$|A_3 \cap A_5| = \lfloor \frac{100}{15} \rfloor = 6$
$|A_5 \cap A_7| = \lfloor \frac{100}{35} \rfloor = 2$

Je-li n složené, je dělitelné něčím mezi $2, \sqrt{n}$.

$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor \frac{100}{105} \rfloor = 0$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor \frac{100}{210} \rfloor = 0$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 3$
$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor \frac{100}{70} \rfloor = 1$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \lfloor \frac{100}{42} \rfloor = 2$

$(P, \le)$

a) (P, R) $\quad aRb := b \le a$

?R je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní

reflexivita $\le$

· $\forall a \in P \quad aRa = a \le a$ ✓

b) (P^2, S) $\quad (a,b)\,S\,(c,d) := a \le c \;\&\; b \le d$

tranzitivita

$(a,b)\,S\,(c,d) \;\&\; (c,d)\,S\,(e,f)$

$\overset{?}{\Rightarrow} (a,b)\,S\,(e,f)$

$(a,b)\,S\,(c,d) \iff a \le c \;\&\; b \le d$

$(c,d)\,S\,(e,f) \iff c \le e \;\&\; d \le f$

$\Downarrow$ tranzitivita $\le$

$(a,b)\,S\,(e,f) \iff a \le e \;\&\; b \le f$

c) $(\mathcal{F}, T)$ $\quad \mathcal{F}$ funkce $\mathbb{N} \to P$

$fTg := f = g$ nebo $f \neq g$ a pro nejmenší $x \in \mathbb{N}$

$f(x) \neq g(x)$: $f(x) \le g(x)$

$\boxed{X \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad (0,\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} = X}$

$\{a \mid (a,a) \in \le\}$ $P =$

$fTg \;\&\; gTh \Rightarrow fTh$

$(P, \le)$ $\quad X \subseteq P$ ..... $\sup X$

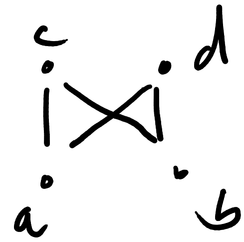
- neexistuje ($\notin P$)
- existuje $\in P \setminus X$
- leží v X

$(P, \le)$ čum $\qquad X \subseteq P$ podmnožina

- horní mez X je jakýkoli prvek $m \in P$ t.ž. $\forall x \in X$ platí $x \le m$.

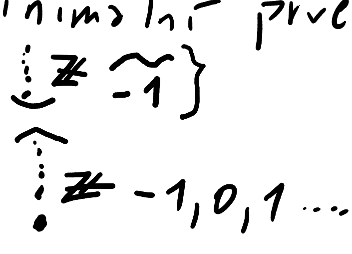
?Co je sup $\emptyset$?

- supremum X je nejmenší prvek množiny všech horních mezí X, pokud existuje
  - tři důvody neexistence
    - množina horních mezí je prázdná
      $X = [0, +\infty)$ v $\mathbb{R}$
    - množina horních mezí má více minimálních prvků

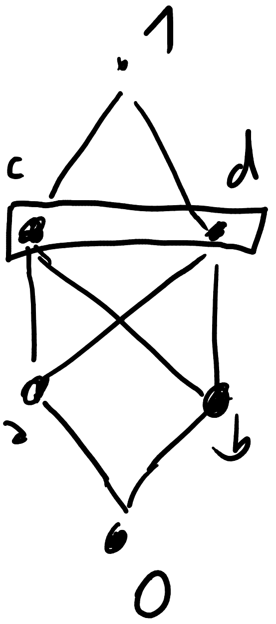


horní meze $\{a,b\}$ jsou c,d. ale žádná není nejmenší.

    - množina horních mezí nemá žádný minimální prvek



$a < \tilde{b} \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$



$\sup\{c,d\} = 1 \qquad \inf\{c,d\} =$ neexistuje

$\sup\{a,b\} =$ neexistuje

$\inf\{a,b\} = 0$

$A \Longleftrightarrow B \qquad A \Rightarrow B \; \ldots\ldots \; \neg B \Rightarrow \neg A$

$\qquad\qquad\qquad B \Rightarrow A \; \ldots\ldots \; \neg A \Rightarrow \neg B$

- $\sup\{x\} = \inf\{x\} = x \quad \forall x \in P$

Dedekindovy řezy

Dedekind - MacNeillovo zúplnění.