October 30, 2020

1 Cvičení diskrétní matematika 30.10.2020

1.1 Princip inkluze a exkluze

Připomenutí principu inkluze a exkluze: Ve verzi pro tři množiny:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

V obecné verzi pro konečně mnoho množin $(A_i)_{i \in I}$:

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{J \subsetneq I} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right| = \sum_{k=1}^{|I|} (-1)^{k+1} \sum_{J \in \binom{I}{k}} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|. \tag{1}$$

Spočtěte následující

1. Na stavbě je 80 dělníků: zedníků, tesařů a klempířů. 15 lidí ovládá všechny profese naráz, na stavbě je 50 zedníků, 50 klempířů, 45 tesařů. Kolik lidí ovládá právě dvě z uvedených profesí?
2. Kolika způsoby lze rozmístit 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby alespoň jeden sloupec či řádek obsahoval 4 kameny (na každé pole se vejde jen jeden kamen).
3. Milan má 7 kamarádů. Každý den v týdnu by rád pozval 3 z nich na večeři. Kolika různými způsoby může zaplnit týden, pokud nechce žádného kamaráda vynechat?
4. Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, které žádné sudé číslo nezobrazí na sudé číslo
5. Počet zobrazení $\{1, 2, \ldots, n\}$ (a) na množinu $\{1, 2\}$; (b) na množinu $\{1, 2, 3\}$; (c) (*) na množinu $\{1, 2, \ldots, m\}$
6. Pokud z množiny čísel $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ vyškrtáme všechny násobky čísel $2, 3, 5$ a 7, kolik čísel nám zbyde?
7. Kolik přirozených čísel menších než 100 není dělitených žádnou druhou mocninou přirozeného čísla > 1?
8. Kolik je mezi čísly $\{1, 2, \ldots, 100\}$ prvočísel
9. Ve frontě stojí 4 Američané, 3 Rusové, 5 Číňanů. Kolik je možností, jak může fronta vypadat, jestliže víme, že žádná národnost netvoří souvislý blok
10. Kolika způsoby lze uspořádat písmena $A, B, C, D, \ldots, P$ tak, že z dané posloupnosti nelze vyškrtnutím písmen vytvořit BAD, DEAF, APE? Co když zakážeme i LEADING?
11. Pro přirozené číslo n označuje $\varphi(n)$ počet čísel $d < n$ takových, že $nsd(n, d) = 1$. Dokažte $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
12. Pro přirozené číslo n buď $\mu(n) = 0$ pokud n je dělitelné k^2 pro nějaké $k > 1$. Jinak buď $\mu(n) = (-1)^k$, kde k je počet různých prvočísel v rozkladu n. Pro každé přirozené číslo n spočtěte $\sum_{d|n} \mu(n)$.
13. Spočtěte počet možností, jak rozsadit n párů kolem kulatého stolu s $2n$ místy tak, aby žádný pár neseděl vedle sebe.

1.2 Grafy

14. Kolik existuje grafů na množině $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$?

15. Dva grafy jsou izomorfní, pokud jeden lze získat z druhého přejmenováním vrcholů. Najděte všechny neizomorfní grafy na $0, 1, 2, 3$ a 4 vrcholech.