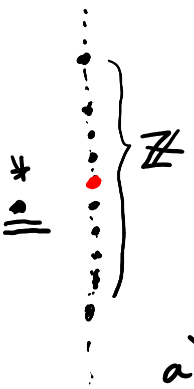
Cvičení diskrétní matematika

DÚ: P uspořádaná množina

- řetězec je podmnožina $R \subseteq P$, taková, že každé dva prvky v R: lze porovnat: $\forall x, y \in R$ $x \leq y$ nebo $y \leq x$.



- antiřetězec je podmnožina $A \subseteq P$, že $\forall$ dva prvky jsou neporovnatelné $x \not\leq y$ ani $y \not\leq x$

a) Najděte ~~množinu~~ ČUM, který má jediný maximální prvek, který ale není největší.

b) šířka P := největší velikost antiřetězce $\sim P := \alpha(P)$
výška P := největší velikost řetězce $\sim P := \omega(P)$
Dokažte, že P lze rozložit na $\omega(P)$ antiřetězců.
(P konečná) $\quad P = \bigcup_{i=1}^{\omega(P)} A_i$; $\forall A_i$ je antiřetězec
$\forall i, j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

II) Kombinatorické počítání

Př) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Obě strany počítají počet všech podmnožin n-prvkové množiny.

$\binom{n}{k}$ … # k-prvkových podmnožin n prvkové množiny

Př) $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\underbrace{(\dot{a}+b)(a+\dot{b})(a+\dot{b}) \dots (\dot{a}+b)}_{n\times}$$

Jak dostanu a^{n-i} ~~a~~ b^i
… vyberu i závorek, ve kterých vyberu b
$\Rightarrow$ celkem $\binom{n}{i}$.

Př) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{když } n=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$n=3$ $\quad \underset{1}{\binom{3}{0}} - \underset{3}{\binom{3}{1}} + \underset{3}{\binom{3}{2}} - \underset{1}{\binom{3}{3}} = 0$

a) Binomická věta
$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$$

b) Počítáme podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$
sudé velikosti: $+1$
liché velikosti: -1

Podmnožin sudé velikosti je stejně jako podmnožin liché velikosti.

(Pro $n > 0$) $\exists x \in \{1, \dots, n\}$

$A \mapsto A \triangle \{x\}$ bijekce, zobrazí „sudou" množinu na „lichou" a obráceně

Př) $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$ ✓

Dk: Máme n rytířů, chtějí jet na trestnou výpravu s velitelem.

Vybíráme skupinu rytířů, co jede na trestnou výpravu a velitele.

a) Vyberem skupinu k rytířů a mezi nimi velitele

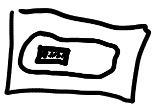
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

b) Prvně vybrat velitele .... n způsobů, pak doplnit zbylé rytíře; 2^{n-1} způsoby

$$n2^{n-1}$$

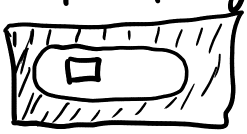
• $\binom{n}{r}\binom{r}{k}$ ..... počítáme počet dvojic podmnožin $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$|B| = r$, $|A| = k$



• .... prvně vybereme A a pak prvky, co nejsou v B

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-r}$$



..... $\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-r}$