

Cvičení z Diskrétní matematiky 9. 10. 2020

Matematická indukce

Probírali jsme příklady, kde je třeba na začátku indukce ověřit několik hodnot.

1. Fibonacciho čísla jsou čísla splňující $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2.$$

Dokažte, že

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

2. Lucasova čísla jsou čísla splňující $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ a

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1} \quad \text{pro } n \geq 2.$$

Dokažte, že

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

3. Mějme rekurentně zadanou posloupnost a_n , $n \in \mathbb{N}$, kde $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$ a

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} - 3 \quad \text{pro } n \geq 3.$$

Dokažte, že $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

Relace

Probrali jsme základní vlastnosti relací: reflexivitu, symetrii, antisymetrii a tranzitivitu.

4. Dokažte, že relace dělitelnosti na přirozených číslech je tranzitivní, reflexivní a antisymetrická, ale není symetrická.
5. Najděte relaci R na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická, i antisymetrická zároveň. Kolik takových relací existuje?