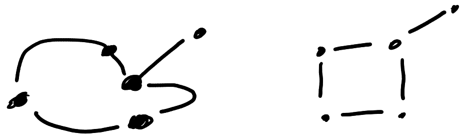
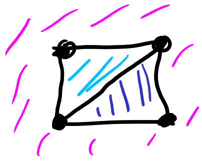
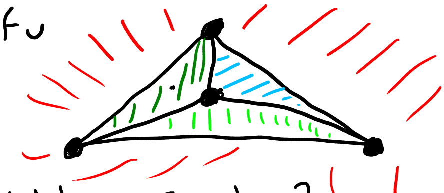
Rovinné grafy

G rovinný graf ∃ nakreslení do roviny, ve kterém se hrany nekříží, ...



stěna rovinného grafu





Kolik má stěn?

Eulerova formule

$$\underset{\#\text{vrcholů}}{|V|} - \underset{\#\text{hran}}{|E|} + \underset{\#\text{stěn}}{|F|} = 1 + \overset{\#\text{komponent}}{c}$$

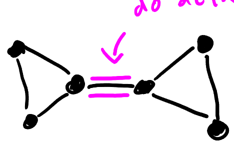
Tvr) ∀ rovinný graf má vrchol stupně ≤ 5.

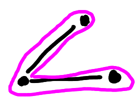
∀ rovinný graf má ≥ 4 vrcholy stupně ≤ 5.

Tvr) K_5 je nerovinný ✓

$K_{3,3}$ není rovinný ✓

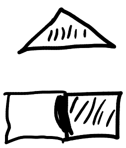
do délky stěny se počítá dvakrát





Nápověda: ∀ hrana je „obsažena ve dvou stěnách"

počet hran .... ∀ stěna má nějakou délku



• $2|E| = \sum_{f \in F} (\#\text{hran } f)$ (délka stěny := # stran hran)

BÚNO G souvislý s alespoň 3 vrcholy

$$2|E| = \sum_{f \in F} (\text{délka stěny}) \geq \sum_{f \in F} 3 = 3|F| \underset{\text{Eulerova formule}}{=} 3(2 + |E| - |V|)$$

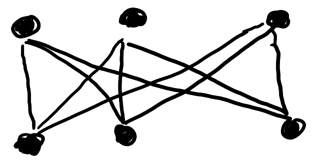
$$\rightarrow \boxed{|E| \leq 3(|V| - 2)}$$

Průměrný stupeň $\frac{2|E|}{|V|} \leq \frac{6|V| - 12}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$

$\Rightarrow$ ∃ vrchol stupně 5

K_5 není rovinný   Kdyby ano: $10 \leq 3\cdot(5-2)=9$ ×

$K_{3,3}$ $9 \leq 3\cdot(6-2)=12$ ✓



K_3 neobsahuje trojúhelníky:

$\rightarrow |E| \leq 3|V|-6$

lze nahradit:

$|E| \leq$

$$2|E| = \sum_{f\in F} d(f) \geq 4|F| = 4(2+|E|-|V|)$$

$$2|E| \geq 8+4|E|-4|V| \quad /+4|V|-2|E|$$

$$4|V| \geq 8+2|E| \quad -8$$

$$4|V|-8 \geq 2|E| \quad /:2$$

$$2|V|-4 \geq |E|$$

$$\underline{|E| \leq 2|V|-4}$$

pokud G je rovinný graf bez trojúhelníků

Kdyby $K_{3,3}$ rovinný

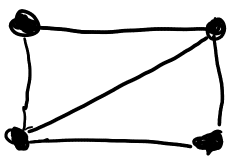
$\cancel{6}9 \leq 2\cdot 6-4=8$ ×

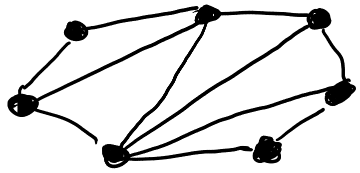
Př) Dokažte, že vrcholy každého rovinného grafu lze obarvit pomocí 6 barev tak, že vrcholy spojené hranou mají různé barvy: $\exists$ vrchol v stupně ≤ 5. $G-v$ je rovinný a dle indukce lze obarvit pomocí 6 barev; v má ≤ 5 sousedů (či méně), $\exists$ barva na obarvení v.

Př) Graf G je <u>vnějškově rovinný</u>, pokud lze nakreslit do roviny tak, že všechny vrcholy leží na vnější stěně. Dokažte, že K_4 a $K_{2,3}$ nejsou ~~rovin~~ vnějškově rovinné grafy.

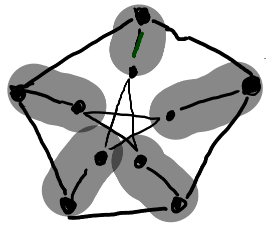
Př) $\forall$ vnějškově rovinný graf má vrchol stupně ≤ 4 a lze obarvit 5 barvami (vlastně 3)

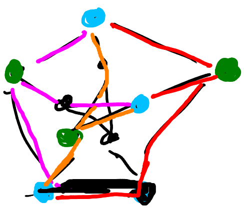
Vnějškově rovinné grafy

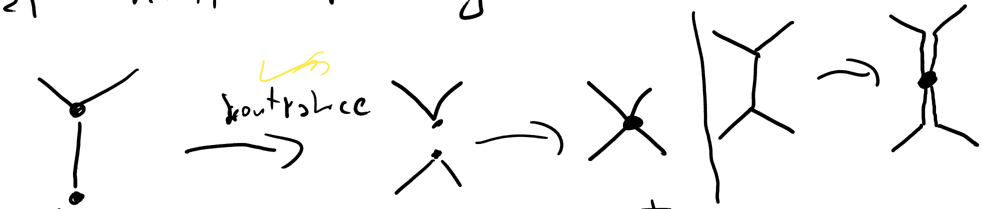




Př) Petersenův graf není rovinný







zachovává rovinnost

⇒ Po kontrakci označených hran umíme nakreslit K_5

⇒ Najdu podrozdělení $K_{3,3}$

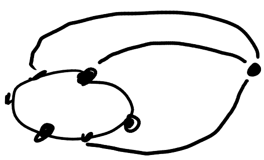
Podrozdělení $K_{3,3}$ je graf, který vznikne opakovaným dělením hran.

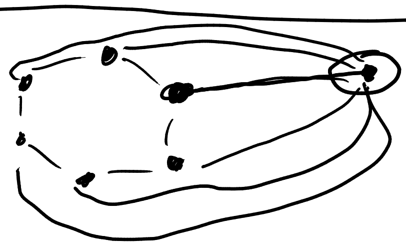
Př) Kdyby K_4 bylo vnějškově rovinné

přidám vrchol do vnější stěny a spojím se všemi zbylými ⇒ dostanu rovinné nakreslení K_5 ↯

když $K_{2,3}$

by bylo vnějškově rovinné, přidám vrchol do vnější stěny a spojím s příslušnými vrcholy, abych dostal $K_{3,3}$. ↯





$\deg v \geq 6$

$\exists$ vrchol stupně ≤ 5

≤ 4