1 Cvičení z Diskrétní matematiky 2. 10. 2020

1.1 Matematická indukce

1. Dokažte: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

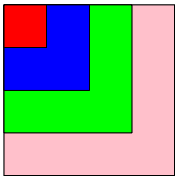
   Indukce Budeme postupovat indukcí. Pro $n = 0$ tvrzení zjevně platí.

   Nyní předpokládejme, že platí pro všechna čísla $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ a zkusme ho dokázat pro $n = k + 1$.

   Musíme tedy najít způsob, jak výraz $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)$ zredukovat na nějaký „menší problém“, něco, co už umíme spočítat.

   To je ovšem snadné: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + (2(k+1) - 1$. Nyní můžeme využít naší znalosti řešení pro „menší případy“, uvedená suma se tedy rovná: $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. Vidíme tedy, že tvrzení musí platit pro všechna k.

   Grafický důkaz

2. Dokažte, že každé kladné celé číslo je součinem prvočísel.
   Kladné celé číslo $p > 1$ je prvočíslo, pokud platí následující: Zapíšeme-li p jako součin dvou kladných celých čísel $p = a \cdot b$, tak $b = p$ nebo $a = p$. Připomínáme také, že $1 = \prod_{i \in \emptyset} i$.

   Opět budeme postupovat indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Buď tedy $n > 1$. Pak buď n je nějaké prvočíslo p, a je tedy součinem jednoho prvočíslo, totiž p samotného, nebo lze n zapsat jako $a \cdot b$, kde $b < p$ and $a < p$. Dle indukčního předpokladu a i b lze zapsat jako součin prvočísel, a tedy i $a \cdot b$ lze zapsat jak součin prvočísel.

3. Indukcí teď dokážeme, že máme-li k aut, tak všechna mají stejnou barvu, a tudíž všechna auta mají stejnou barvu. Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí. Nyní uvažme $k + 1$ aut, dle indukčního předpokladu má prvních k aut stejnou barvu, posledních k aut stejnou barvu. Ale tato barva se musí rovnat barvě auta v jejich průniku. Tudíž všech $k + 1$ aut má stejnou barvu.

   Kde je chyba?

2 Binomická čísla

4. Pro reálné číslo n a nezáporné celé číslo k definujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Dokažte, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots k(k+1)} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\left(\frac{n+1}{k+1}\right) \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k(k+1)} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Jiný důkaz: Pokud je n přirozené číslo, tak $\binom{n}{k}$ počítá počet různých k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Máme-li $n+1$ prvkovou množinu A, vybereme nyní jeden její prvek x. Nyní máme dva typy $k+1$ prvkových podmnožin A: množiny, které obsahují x, těch je $\binom{n}{k}$ a množiny, které neobsahují x, těch je $\binom{n}{k+1}$.

Nyní si stačí uvědomit, že $\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}$ je polynom stupně nejvýše $k+1$ a my jsme právě ukázali, že každé přirozené číslo je jeho kořenem. Tedy onen polynom musí být nulový a rovnost platí pro všechna čísla.

3 Množiny

5. Jsou-li A, B, C množiny splňující $A \times C = B \times C$, platí nutně $A = B$? Pokud ne, najděte protipříklad.

$A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \emptyset$.
Je-li však C neprázdné, tak již nutně $A = B$.

6. Buďte A, B, C množiny. Dokažte: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Rovnost dvou množin dokazujeme tak, že ukážeme, že každý prvek, který leží v první množině, leží i v množině druhé. Poté ukážeme, že každý prvek, který leží v druhé množině, leží i v množině první.

Buď tedy x prvek v $A \setminus (B \cap C)$. Takový prvek x leží v A a neleží v $B \cap C$, tedy buď neleží v B, (a je prvkem $A \setminus B$), nebo neleží v C (a je prvek $A \setminus C$). Tudíž

$$A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Buď nyní x prvkem $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Takový prvek buď leží v A a neleží v B, nebo leží v A a neleží v C. Tedy x leží v A a neleží v B i C zároveň, neboli x je prvkem $A \setminus (B \cap C)$. Tudíž i

$$A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

7. Máme-li dvě množiny, A, B, jejich symetrická diference $A\Delta B$ je definována vztahem

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zjistěte, které z následujících vztahů platí, a které ne.

(a) $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
(b) $A\Delta B = B\Delta A$
(c) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
(d) $A\Delta(B\Delta A) = A$
(e) $A\Delta A = \emptyset$
(f) $A\Delta\emptyset = A$.

4 Volné příklady

1. Buď b libovolné číslo a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte vzorec pro součet geometrické řady

$$\sum_{i=0}^{k} b^i = \begin{cases} \frac{b^{k+1}-1}{b-1} & \text{pro } b \neq 1, \\ k+1 & \text{pro } b = 1. \end{cases}$$

2. Dokažte, že pro všechna kladná celá čísla n platí $2^n \geq 2n$.

3. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x \in [-1, +\infty)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

4. Nechť x je reálné číslo takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ je celé.