Lineární algebra 2 – cvičení

Jordanův normální tvar atd.

Ondřej Pangrác

7.5.2021

Příklad 1:
Převeďte matici na Jordanův normální tvar (rozklad $A = RJR^{-1}$):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: matice má jedniné vlastní číslo $\lambda = 2$ s algebraickou násobností 4, vlastní vektory jsou nenulová řešení soustavy rovnic s maticí

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dimenze $Ker(A - \lambda I)$ je rovna 2, takže matice A má k vlastnímu číslu dva LNZ vlastní vektory, volíme např. $x_1 = (0, 0, 1, 0)^T$ a $x_2 = (1, 0, 0, 0)^T$

Pro sestavení regulární marice R potřebujeme ještě najít další 2 zobecněné vlastní vektory. Ty hledáme tak, že místo soustavy $(A - \lambda I)x = 0$ dosadíme za pravou stranu vlastní vektor (případně v dalším kroku pak zobecněný vlastní vektor), tedy řešíme soustavu s rozšířenou maticí (pro x_1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

která nemá řečení (viz. druhý a třetí řádek). Z toho odvodíme, že tomuto vlastnímu vektoru bude odpovídat Jordanova buňka velikosti 1.

Pro druhý vlastní vektor x_2 tím pádem musíme dopočítat dva zobecněné vlastní vektory a druhá Jordanovu buňku bude mít velikost 3. Počítáme podobně jako v předchozím případě, pravou stranu zvolíme x_2

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

množina řešení je affiní podprostor dimenze 2, přesněji vektory ve tvaru $(p, 1, q, 0)^T$, my za x_3 zvolíme $p = q = -1$ a tak $x_3 = (-1, 1, -1, 0)^T$

dále vezmenme x_3 jako pravou stranu již mnohokrát řešené soustavy a pokračujeme

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

s (pro další výpočet pěkným) řešením $x_4 = (0, 0, 0, -\frac{1}{2})^T$

Nyní můžeme sestavit matice J a R a poté dopočítat R^{-1}

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ R^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Příklad 2:
Převeďte matici na Jordanův normální tvar (rozklad $A = RJR^{-1}$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Vlastní číslo $\lambda = 0$ s algebraickou násobností 5.

hodnost matice A je rovna 3, takže $\dim(\mathrm{Ker} A) = 2$ a máme dva LNZ vlastní vektory

Kdybychom chtěli k vlastnímu vekoru x_1 dopočítat zobecněný vl. vektor x_2, znamenalo by to řešit rovnici

$$(A - \lambda I)x_2 = x_1$$

což lze nahlédnout (po úpravě) jako hledání řešení rovnice

$$(A - \lambda I)^2 x_2 = (A - \lambda I)x_1 = 0 \ ,$$

tedy $x_2 \in \mathrm{Ker}((A - \lambda I)^2) \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ atd. pro další vektory v řetízku zobecněných vlastních vektorů.

Pro náš případ s $\lambda = 0$ spočteme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je patrné, že $\dim(\mathrm{Ker} A^2) = 4$ a $\dim(\mathrm{Ker} A^3) = 5$, takže bude existovat jeden LNZ vektor v $\mathrm{Ker} A^3 \setminus \mathrm{Ker} A^2$, např. $x_3 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$. Ten by měl splňovat $Ax_3 = x_2$, tedy dopočteme $x_2 = (-1, 0, -1, 1, 0)^T$ a $x_1 = Ax_2 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ (což je vlastní vektor matice A). Tím jsme vyřešili jednu J. buňku velikosti 3.

Druhá buňka bude mít velikost 2 a opět ji budeme počítat od konce řetízku, tedy zobecněnáho vl. vektoru y_2. Pro ten musí platit $y_2 \in \mathrm{Ker} A^2 \setminus \mathrm{Ker} A$ a je LNZ s x_2, volím např. $y_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$ a dopočteme $y_1 = Ay_2 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ (opět vl. vektor A).

Nyní můžeme sestavit matice R a J a dopočítat inverzní matici R^{-1}

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(sloupce jsou po řadě y_1, y_2, x_1, x_2, x_3)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 3:
Převeďte matici na Jordanův normální tvar (rozklad $A = RJR^{-1}$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ R^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Příklad 4:
Symetrickou matici diagonalizujte ve tvaru $A = Q\Lambda Q^T$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Postup je stejný jako při běžné diagonalizaci matic (reálná symetrická matice má reálná vl. čísla a je diagonalizovatelná), pouze báze složená z vlastníc vektorů musí být ortonormální.

Pro matici A dostaneme vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 0$ a $\lambda_3 = 3$. Takže

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vlastnímu číslu 0 odpovídají např. vl. vektory $x_1 = (1, 0, -1)^T$ a $x_2 = (0, 1, -1)^T$, vl. číslu 3 odpovídá vlastní vektor $x_3 = (1, 1, 1)^T$. Všimneme si, že vektor x_3 je kolmý na x_1, x_2, takže ho stačí znormovat. Na vektory x_1, x_2 je ale třeba použít G–S ortogonalizaci:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, -1)^T \\
z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T \\
x_2 &= (0, 1, -1)^T \\
y_2 &= x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = \ldots = \frac{1}{2}(-1, 2, -1)^T \\
z_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T \\
x_3 &= (1, 1, 1)^T \\
z_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T
\end{aligned}$$

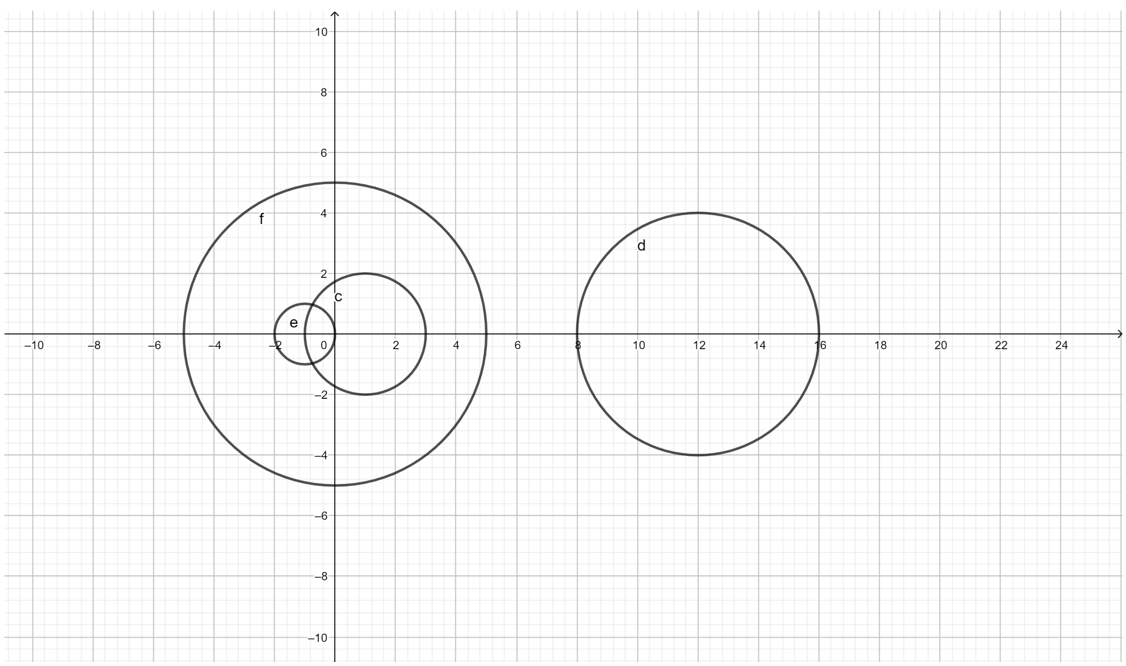
$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Příklad 5:
Pomocí Gerschgorinových disků ukažte, že matice má alespoň dvě různá vlastní čísla (aniž byste je počítali):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \sqrt{3}, \lambda_4 = -\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11} = 1, & r_1 &= |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 2 \\ c_2 &= a_{22} = 12, & r_2 &= |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = 4 \\ c_3 &= a_{33} = -1, & r_3 &= |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = 1 \\ c_4 &= a_{44} = 0, & r_4 &= |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = 5 \end{aligned}$$



Příklad 6:
Aplikujte větu o deflaci největšího vl. čísla na matici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Matice A má vlastní čísla 6, 0 (dvojnásobné) a -2. Vl. číslu $\lambda_1 = 6$ odpovídá vl. vektor $x_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, znormujeme ho na $z_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$.

Deflací dostaneme matici

$$A' = A - \lambda_1 z_1 z_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice A' má vl. čísla 0 (trojnásobné) a -2 a stejné vl. vektory jako matice A.