# 7. Vlastní čísla – základy

**Cv. 7.1** Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Cv. 7.2** Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

**Cv. 7.3** Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 7.4** Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 7.5** Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

**Cv. 7.6** Matice $A$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice $A^2$ má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(b) matice $\alpha A$ má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(c) matice $A+\alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1+\alpha, \dots, \lambda_n+\alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(d) matice $A^T$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

**Cv. 7.7** Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.